

TD Ch 2 – Trigonométrie

1. Calculer le cosinus, le sinus et la tangente des angles suivants : $\frac{\pi}{8}$; $\frac{3\pi}{8}$; $\frac{7\pi}{8}$.

2. Calculer le cosinus, le sinus et la tangente des angles suivants : $\frac{\pi}{12}$; $-\frac{5\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{12}$.

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$, puis sur $[-\pi; \pi]$ les équations et inéquations suivantes. Placer les solutions sur le cercle trigonométrique.

a) $3 \sin(3x) = -4$ b) $|\sin(2x)| = \frac{1}{2}$ c) $2 \cos(2x) < \sqrt{2}$ d) $1 < \tan(5x) \leq \sqrt{3}$

4. Résoudre , sur $\mathbb{R}$, puis sur $[0, 2\pi[$, les équations trigonométriques suivantes et placer (si possible) les solutions sur le cercle trigonométrique.

a) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ b) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ c) $\tan\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x + \frac{4\pi}{5}\right)$
d) $2 \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ e) $\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ f) $2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

5. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1 + \cos(x)}{\sin(x)}$, et factoriser au maximum l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.

On utilisera une formule faisant apparaître $1 + \cos(2a)$.

6. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation $2 \sin x - 1 < \sqrt{1 - 4 \cos^2 x}$

7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $\sin(x) + \cos(x) + 1 = 0$ b) $-\sqrt{2} \cos(x) + \sqrt{2} \sin(x) = 1$
c) $\cos(2x) - \sqrt{3} \sin(2x) = -\sqrt{2}$ d) $\cos(x) + \sqrt{3} \sin(x) = a$ où $a \in \mathbb{R}$

8. 1. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a : $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos(a) \cos(b)$.
2. En déduire que pour tous $p, q \in \mathbb{R}$, on a : $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
3. Appliquer cette formule pour obtenir une factorisation des expressions suivantes, où $x \in \mathbb{R}$:

a) $\cos(x) + \cos(3x)$ b) $\cos(4x) + \cos(10x)$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $3 \cos(5x) = \cos(2x) + \cos(12x)$ b) $\cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) = 0$

5. Sur le même modèle que les questions 1 et 2, obtenir une formule pour $\sin(p) + \sin(q)$, puis en déduire l'ensemble des solutions de l'équation $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

9. Résoudre dans $[0; 2\pi]$ les équations et inéquations suivantes :

a) $2\sin^2(x) + \cos(x) - 1 \geq 0$

b) $\sin^2(x) + 3\cos(x) - 1 = 0$

c) $\tan^2(x) - \frac{4}{\sqrt{3}}\tan(x) + 1 < 0$

d) $4\cos^3(x) - 3\cos(x) = 4\sin^2(x) - 1$

e) $\cos(2x) - \cos(4x) < 0$

f) $2\sin(x)\tan(x) - 3 < 0$

10. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f dans les cas suivants :

a) $f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) - 2\sin(x) - 3}$

b) $f : x \mapsto \frac{\sin(3x)}{1 + \cos(x)}$

c) $f : x \mapsto \frac{1}{\sin(3x)} - \frac{\tan(x/2)}{1 - \sin^3(x)}$

d) $f : x \mapsto \sqrt{\cos^2(x) - \cos(x)}$

e) $f : x \mapsto \ln(2 + \cos^3(x))$

f) $f : x \mapsto \sqrt{x - \sin(x)}$

11. (*) Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $a \in]0; \pi[$, on a l'égalité :

$$\cos\left(\frac{a}{2}\right) \cos\left(\frac{a}{4}\right) \dots \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$$

On appliquera l'hypothèse de récurrence à $\frac{a}{2}$.
