

TD - Révisions sup

I. Analyse

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3, et f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n + x^2 + 2x - 1$. On considère l'équation $(E_n) : x^n + x^2 + 2x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que l'équation (E_n) admet une unique solution x_n dans $]0; 1[$.
 2. Montrer, en considérant $f_n(x_{n+1})$, que la suite (x_n) est strictement croissante. Montrer que (x_n) est majorée par $\frac{1}{2}$ et convergente.
 3. Déterminer la limite de (x_n^n) , puis la limite de (x_n) .
-

2. On définit la suite (u_n) par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction définie par : $f : x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$.

1. Faire l'étude complète de la fonction f (domaine de définition, limites aux bornes, régularité, branches infinies, variations).
 2. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0, 1]$.
 3. Montrer que f a un unique point fixe que l'on note α . Vérifier que $\alpha \in [0, 1]$.
 4. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.
(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} : |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
(c) Conclure sur la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
-

3. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1 + e^x}$.

1. (a) Étudier la dérivabilité de f et donner l'expression de f' .
(b) Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) = 0$. En déduire le signe de f' sur $\mathbb{R}$. *On pourra dresser le tableau de variation de f' à l'aide d'une étude de fonction auxiliaire.*
(c) Établir que $a \in]1, 2[$ et que $f(a) = a - 1$.
(d) Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ puis tracer le tableau de variations de f .
(e) Montrer que la courbe de f admet des asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$, et étudier la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.
(f) Tracer finalement l'allure de la courbe de f à l'aide des réponses aux questions précédentes.
 2. On considère maintenant la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 1 + e^{-x}$.
(a) Prouver que a est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
(b) Justifier que $0 < a - 1 < \frac{1}{e}$.
(c) Montrer que $\forall x \geq 1 : h(x) \geq 1$ et $|h(x) - a| \leq \frac{1}{e}|x - a|$.
 3. On définit la suite $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par : $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = h(a_n)$.
(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 1$.
(b) Déduire des questions précédentes que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_{n+1} - a| \leq \frac{1}{e}|a_n - a|$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n - a| \leq \frac{1}{e^{n+1}}$.
(c) On donne $\ln(10) \simeq 2.3$. Proposer, sans la calculer, une valeur approchée à 10^{-2} près de a .
-

4. On considère la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{4x}{1 + \ln \left| \frac{x}{x-4} \right|}$$

et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ où x_1, x_2, x_3, x_4 sont quatre réels à déterminer tels que $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Pour information $x_1 \approx -2,33$ et $x_3 \approx 1,08$.
2. (a) Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0 et en 4 .
(b) Étudier la dérivabilité de f en 0 .
(c) Étudier la dérivabilité de f en 4 .
3. (a) Déterminer les limites de f en x_1 et x_3 .
(b) Que peut-on en déduire sur $\mathcal{C}$?
4. (a) Montrer qu'au voisinage de $\pm\infty$,

$$f(x) = 4x - 16 + 32\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

- (b) En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, et déterminer la position relative de $\mathcal{C}$ et de son asymptote.

5. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$ par

$$g(x) = 1 + \ln |x| - \ln |x - 4| + \frac{4}{x - 4}.$$

- (a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.
- (b) Montrer qu'au voisinage de 4, $g(x) \sim \frac{4}{x-4}$, et en déduire $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)$.
- (c) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
- (d) Étudier les variations de g . Faire un tableau pour conclure.
- (e) Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) = 0$.
- (f) Comment pourrait-on faire pour obtenir une valeur approchée de x_0 . On ne demande pas de la faire ici et pour information on trouve $x_0 \approx -5,24$.
- (g) Dresser le tableau de signes de g .
6. (a) Déterminer la dérivée de f sur $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$
(b) Dresser le tableau de variations complet de f .
7. Tracer $\mathcal{C}$. Pour l'échelle, en abscisse 1 unité 1 cm ou 1 carreau, en ordonnée 10 unités 1 cm ou 1 carreau. Pour information $f(x_0) \approx -48,43$.

5. 1. Résoudre les équations différentielles d'ordre 1 suivantes. On appliquera la méthode de variation de la constante pour obtenir une solution particulière.

a) $y' - \frac{2}{x}y = x^2$, sur $\mathbb{R}_+^*$

b) $2xy' - 3y = \sqrt{x}$, sur $\mathbb{R}^+$

c) $y' - 2xy = (1 - 2x)e^x$, sur $\mathbb{R}$

d) $(1 + x)^2 y'' + (1 + x)y' - 2 = 0$ sur $] -1, +\infty[$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $xy'' + 2(x + 1)y' + (x + 2)y = 12xe^x$, en posant $z(x) = xy(x)$.

3. Trouver tous les couples de fonctions (y, z) où $y, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables et vérifient $\begin{cases} y' - y = z \\ z' + z = 3y \end{cases}$.

Pour (y, z) une solution, on montrera que y et z sont deux fois dérivables, et on cherchera une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par y ou z .

II. Algèbre

6. On définit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ par $\varphi(P) = P' \circ (X + 1)$.

1. Montrer que φ est linéaire.
 2. Donner degré de $\varphi(P)$ en fonction du degré de P .
 3. En déduire que φ^4 est l'application linéaire nulle sur $\mathbb{R}_3[X]$.
 4. Déterminer la matrice associée à φ dans la base canonique.
 5. On note $P_0 = X^3$, $P_1 = \varphi(P_0)$, $P_2 = \varphi(P_1)$ et $P_3 = \varphi(P_2)$.
Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
 6. Déterminer la matrice de φ dans la base de la question précédente.
-

7. Soit $g(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y, x + z)$

1. Montrer que g est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
 2. Calculer g^{-1} en utilisant deux méthodes différentes et en vérifiant que l'on retombe bien sur la même expression.
-

8. Soit $f(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x - y + z, 2x + 9y - 5z, -2x + 11y - 7z)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
 2. Donner une base et la dimension de son noyau et de son image. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
 3. On note $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
On appelle aussi $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2, u_3)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définie par : $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (1, -1, 0)$ et $u_3 = (2, 0, 1)$.
De même, on note $\mathcal{C}_2 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ définie par : $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0, 1)$, $v_3 = (1, 0, 0, 1)$ et $v_4 = (0, 1, -1, 1)$.
(a) Montrer que $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathcal{C}_2$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
(b) Calculer les matrices suivantes : $Mat_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1}(f)$, $Mat_{\mathcal{B}_2, \mathcal{C}_1}(f)$, $Mat_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_2}(f)$, et $Mat_{\mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2}(f)$.
-

9. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et soit f l'application linéaire canoniquement associée à A .

1. Déterminer matriciellement une base et la dimension du noyau et de l'image de f . L'application linéaire f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
 2. Donner l'expression de $f(x, y, z)$.
 3. (a) On note $B = A - 2I_3$. Exprimer B^2 , et en déduire B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
(b) En déduire les puissances de la matrice A .
(c) Calculer f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
-

III. Probabilités

10. On lance n dés, avec $n \in \mathbb{N}^*$, et on note A_n l'événement : "la somme des résultats est paire". Déterminer la probabilité de A_n en fonction de n . On cherchera une relation de récurrence !

11 (par Benjamin). Nathanaël s'est fait une entorse à la cheville. N'ayant pas de sens du danger, il se déplace sur une crête granitique formant une ligne droite, graduée par des "chaos granitiques". Ayant consommé une quantité déraisonnable de lécithine de soja, il se déplace par sauts indépendants vers la gauche ou la droite, d'amplitude "1 chaos granitique". Cependant, sa cheville le faisant souffrir, il saute vers la droite avec probabilité $p = 0,25$ et vers la gauche avec probabilité $q = 0,75$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si Nathanaël saute à droite à l'instant n , et -1 s'il saute à gauche. Déterminer la loi de X_n , et calculer son espérance et sa variance.
2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Que représente S_n ? Déterminer son espérance et sa variance de S_n .
3. Déterminer la probabilité que Nathanaël soit revenu à son point de départ après n sauts. On pourra distinguer selon la parité de l'entier n .
4. Quelle est la probabilité que Nathanaël soit à droite de son point de départ après 10 sauts?

12. Pendant le stage de 5 jours en Auvergne, la classe de 1BioB passe tous les jours devant le champ de l'INRAE pour espérer observer des vaches à canules. Le troupeau est constitué de 10 vaches, toutes opérées au flanc gauche. Chaque jour, le troupeau entier sort dans le champ avec probabilité p , et reste à l'intérieur sinon. Si le troupeau est sorti, chaque vache est tournée vers la gauche ou la droite, avec équiprobabilité et indépendamment du reste du troupeau.

1. Déterminer la loi du nombre de canules visibles le i -ième jour, et calculer son espérance.
2. Déterminer la probabilité que les élèves ne voient pas une seule canule de tout le séjour.

IV. Un peu de sommes et de polynômes

13. 1. Calculer les sommes et produits suivants :

$$\text{a) } \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2 \quad \text{b) } \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} 2^{i+j} \quad \text{c) } \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} \quad \text{d) } \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n$

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. En dérivant de deux manières le polynôme $(1+X)^n$, montrer que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
2. À l'aide du polynôme $P = (1+X)^n(1+X)^n$, montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$
3. Montrer que $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p}$.

15. On considère f définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{(\cos(x))^{n+1}}$$

2. Donner une relation entre P_{n+1} , P_n et P'_n .
3. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n pour $n \in \mathbb{N}$.

16. On définit $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ par $f(P) = P(X+1) - P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer le polynôme $f(X^k)$, et en déduire son degré et son coefficient dominant.
3. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré ≥ 2 , $\deg(f(P)) = \deg(P) - 2$.
4. Déduire des questions précédentes le noyau de l'application linéaire f .
5. Pour $n \geq 2$, on note $f_n : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto f(P) \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Justifier que f_n est bien définie, et qu'elle est surjective. On pensera au théorème du rang.
6. En déduire que f est surjective.