

Cours/TD – Suites implicites et suites récurrentes

I Suites implicites

Certaines suites sont parfois définies de manière "implicite", c'est-à-dire qu'on définit u_n sans donner de moyen de calculer explicitement ses valeurs. C'est un type d'exercice assez classique, dont la méthode d'étude est vraiment spécifique.

Par exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^n + x - 1$$

1. **Existence :** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $x_n \geq 0$ qui vérifie $f_n(x_n) = 0$. On définit ainsi une suite réelle $(x_n)_{n \geq 1}$.

Méthode : on dresse le tableau de variation de f_n et on utilise le TVI ou le théorème de la bijection.

2. **Minoration/majoration :** Par exemple ici, on veut montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est minorée par 0 et majorée par 1.

Méthode : on utilise encore le tableau de variation.

3. **Monotonie :** Ici, on veut montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

Méthode : Pour comparer x_{n+1} à x_n , on compare $f_n(x_{n+1})$ à 0.

- Simplifier au maximum l'expression de $f_n(x_{n+1})$ en utilisant que $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$.
- Déterminer le signe de $f_n(x_{n+1})$, et conclure grâce à la monotonie de f_n .

4. **Convergence** La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ?

Méthode : Appliquer le théorème de la limite monotone.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $f_n(x_n) = 0$. On définit ainsi une suite réelle $(x_n)_{n \geq 1}$. Déterminer explicitement x_1 .
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est minorée par 0.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
4. Que peut-on en conclure quand à la convergence de $(x_n)_{n \geq 1}$? (bonus : déterminer la limite)

II Suites définies par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$

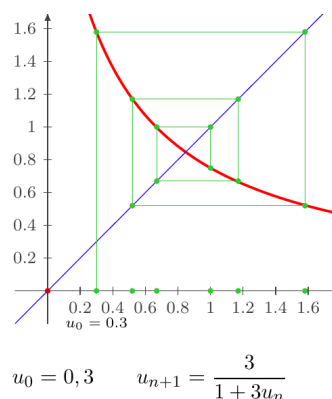
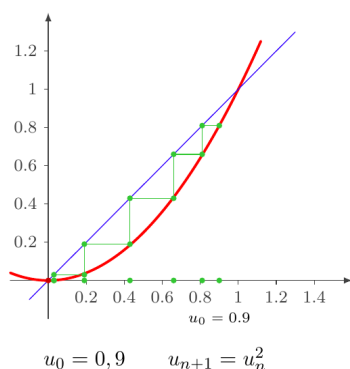
Soit une fonction f définie et continue sur $\mathcal{D}_f$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On souhaite étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathcal{D}_f \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Encore une fois, l'étude de ce type de suite est très spécifique.

1. Étude de la fonction f .

On commence toujours par étudier la fonction f (variations, limites) et tracer son graphe. Sur le même graphe, on trace aussi la droite d'équation $y = x$



2. Définition de la suite.

Pour que la suite soit bien définie, il faut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \in \mathcal{D}_f$.

Il s'agit alors de trouver une

On peut alors montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$.

3. Limite éventuelle de la suite.

Si la suite (u_n) converge vers un réel $l \in \mathcal{D}_f$, alors

..... On résout donc l'équation pour obtenir les valeurs de limites

4. Monotonie.

Pour étudier la monotonie de la suite :

- On peut parfois directement étudier le signe de
- Le plus souvent, on étudie le signe de
- Lorsque f est croissante, alors
- Lorsque f est décroissante, alors

5. Convergence.

Une fois qu'on connaît la monotonie de la suite, on peut souvent utiliser le théorème de convergence monotone.

- Si on sait que la suite converge, comme on connaît la valeur des limites éventuelles (points fixes de f), il reste à *localiser* la limite, par exemple par passage à la limite dans les inégalités larges, ou bien par élimination.
- Si on veut montrer que la suite diverge vers $\pm\infty$, on peut parfois raisonner par l'absurde : on suppose que la suite converge, on connaît alors sa limite par la méthode si-dessus, et on montre que c'est impossible.
- Dans le cas où f est décroissante, on peut utiliser les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) pour conclure sur la convergence.

Exemple

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$

1. Étudier la fonction f associée.
2. Déterminer les limites éventuelles de la suite (u_n) .
3. On suppose que $u_0 \in [0, 1]$.
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [0, 1]$.
 - (b) Étudier la monotonie de la suite, et en déduire sa convergence.
4. On suppose que $u_0 < 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$, et étudier la monotonie et la convergence de (u_n) .
5. Que peut-on dire, dans le cas où $u_0 > 1$?

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1 + u_n^2}{2}$.

1. Étudier les variations de la fonction f associée.
2. Montrer que $[0, 1]$ et $]1, +\infty]$ sont des intervalles stables par f .
3. Déterminer les valeurs possibles pour une éventuelle limite de la suite (u_n) .
4. Étudier le signe de $f(x) - x$.
5. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $u_0 \in [0, 1]$, et si $u_0 > 1$.

Exercice 3. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [-2; +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

Exercice 4. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3}{1 + 3u_n}$.

1. Étudier les variations de la fonction f associée sur $\mathbb{R}^+$.
2. Expliquer pourquoi on peut supposer que $u_0 \in [0, 3]$.
3. Justifier que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones, et en déduire qu'elles convergent.
4. Déterminer la limite de chacune de ces suites. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?