

TD CHO - Logique et raisonnements

Corrigé partiel

Exo 8 -

- Montrons que (i) $\Rightarrow$ (ii). Pour cela, on suppose que (i) est vraie et on montre qu'alors (ii) est vraie.

Montrons donc que $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ (ii).

On suppose donc que A est vraie, et on montre que $B \Rightarrow C$.

On suppose donc que B est vraie, et on doit montrer que C est vraie.

On a supposé que A et B étaient vraies, donc $(A \Rightarrow B)$ est vraie.

Mais alors, selon (i), C est nécessairement vraie.

On a bien montré que $(i) \Rightarrow (ii)$.

- (i) et (ii) ne sont pas équivalentes ! En effet :

Si A et C sont faux : * $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ est vraie (faux $\Rightarrow$ n'importe quoi)

* $A \Rightarrow B$ est vraie (" " ")

* Donc $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ est fausse ($A \Rightarrow B$ vraie mais C faux).

Donc dans ce cas : (ii) est vraie mais (i) est fausse.

Exo 10

a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$

Négation: $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0$

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$

Négation: $\exists x, y \in \mathbb{R}, x \leq y$ et $f(x) > f(y)$

c) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0$

Négation: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$

d) $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$

Négation: $\exists x \in \mathbb{R}, f(-x) \neq f(x)$

e) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$

Négation: $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

f) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = n$

Négation: $\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq n$

g) $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y)$

Négation: $\exists x, y \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(y)$

h) $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c$

Négation: $\forall c \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq c$

i) $\exists T \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$

Négation: $\forall T \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}, f(x+T) \neq f(x)$

Exo 11

Non $A_1(f) \Leftrightarrow \boxed{\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > M}$

$A_1(f)$ est : $\begin{cases} \text{fausse pour exp (en prenant } x = \ln(M) + 1) \\ \text{vraie pour la fonction cos (M = 1 convient)} \\ \text{vraie pour la fonction constante égale à 1 (M = 1 convient).} \end{cases}$

Non $A_2(f) \Leftrightarrow \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)}$

$\begin{cases} A_2(\exp) \text{ est vraie (par exemple avec } x=0 \text{ et } y=1) \\ A_2(\cos) \text{ est vraie (par exemple avec } x=\frac{\pi}{2} \text{ et } y=0) \\ A_2(1) \text{ est fausse (}\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)=1 \geq 1=f(y) \end{cases}$

Non $A_3(f) \Leftrightarrow \boxed{\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^+, f(x) < f(y)}$

$\begin{cases} A_3(\exp) \text{ est fausse (en prenant } x = -1, \text{ on a bien } \forall y \geq 0, e^{-1} < e^y) \\ A_3(\cos) \text{ est vraie (pour } x \in \mathbb{R} \text{ quelconque, } y = |x| \text{ convient)} \\ A_3(1) \text{ est vraie (pour } x \text{ quelconque, } y = 1 \text{ convient).} \end{cases}$

Exo 12:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists z \in \mathbb{R}, z^2 = x\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}^+$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq 1\} = \emptyset$ En effet : pour tout $x \in \mathbb{R}$, en prenant $y = x + 2$, on a $|x - y| = |-2| = 2 > 1$.

c) $x > 1 \Rightarrow x \neq 1$ s'écrit aussi

$\text{non}(x > 1)$ ou $(x \neq 1)$, c'est-à-dire : $(x < 1)$ ou $(x \neq 1)$

On a donc $]-\infty; 1[\cup (\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Exo 13

a) $\forall l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \underbrace{u_n \notin [l - \varepsilon, l + \varepsilon]}_{\Leftrightarrow |u_n - l| > \varepsilon}$

b) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$

Exo 16

a) $A \cap \bar{A} = \emptyset$ b) $A \cup \bar{A} = E$

c) $A \cup (A \cap B) = A$ d) $B \cup (A \cap B) = B$

e) $(E \cup A) \cap B = E \cap B = B$

f) $(A \cup \emptyset) \cup (B \cap \emptyset) = (A \cup \emptyset) = A$

g) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$

Exo 17 Montrons que $D_1 = D_2$ par double inclusion

$\subseteq$ Montrons que $D_1 \subset D_2$. Soit $(x, y) \in D_1$: on sait que $4x - y = 1$.

Montrons que $(x, y) \in D_2$: on cherche $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) = (t+1, 4t+3)$.

Posons $t = x - 1$. Alors :
$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = 4x - 1 = 4(t+1) - 1 = 4t+3 \end{cases}$$

Ainsi, on a bien $(x, y) = (t+1, 4t+3)$, donc $(x, y) \in D_2$.
D'où l'inclusion.

$\supseteq$ Montrons que $D_2 \subset D_1$. Soit $(x, y) \in D_2$: on dispose de $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) = (t+1, 4t+3)$, c'est-à-dire $x = t+1$ et $y = 4t+3$.

Montrons que $(x, y) \in D_1$. On a :
$$4x - y = 4(t+1) - (4t+3) = 4t+4 - 4t-3 = 1$$

D'où $(x, y) \in D_1$. D'où l'inclusion

On a bien montré l'égalité : $D_1 = D_2$.

Exo 20

a) $A \cup B = E$ s'écrit : $\forall x \in E, (x \in A \text{ ou } x \in B)$

$\bar{B} \subset A$ s'écrit : $\forall x \in E, (x \in \bar{B} \Rightarrow x \in A)$, c'est-à-dire
 $\forall x \in E, (\text{non}(x \in \bar{B}) \text{ ou } x \in A)$, ou encore :
 $\forall x \in E, (x \in B \text{ ou } x \in A)$

D'où l'équivalence : $(A \cup B = E) \Leftrightarrow (\bar{B} \subset A)$

b) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \overline{A \cap B} = E$ (en passant au complémentaire)

$\Leftrightarrow \bar{A} \cup \bar{B} = E$

$\Leftrightarrow \bar{B} \cup \bar{A} = E$

$\Leftrightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$ d'après la question a) !!

d'où : $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \bar{B}$

c) On procède par double implication

$\Leftarrow$ On suppose que $A=B$.

Montrons qu'alors $A \cup B = A \cap B$.

Comme $A=B$, on a $A \cup B = A$ et $A \cap B = A$. D'où $A \cup B = A \cap B$

$\Rightarrow$ On suppose que $A \cup B = A \cap B$. Montrons qu'alors $A=B$.

$\square$ Soit $x \in A$. $x \in A \cup B$, donc $x \in A \cap B$. Donc $x \in B$.

D'où $A \subset B$

$\square$ De même, pour $x \in B$, on a $x \in A \cup B = A \cap B$ donc $x \in A$.

D'où $B \subset A$.

D'où l'égalité $A=B$

Ainsi, on a bien l'équivalence : $(A \cup B = A \cap B) \Leftrightarrow (A=B)$.

Exo 21

1. $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, x \in A_n$

$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x \in A_n$

2. a) $\bigcup_{n \geq 1} \left] \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n} \right] =]0; 1[$.

En effet : $\square$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left] \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n} \right] \subset]0; 1[$.

Donc $\bigcup_{n \geq 1} \left] \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n} \right] \subset]0; 1[$

$\square$ Soit $x \in]0; 1[$. Prenons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$\frac{1}{n} \leq x$ et $\frac{1}{n} < 1-x$, (qui existe en prenant par exemple $n = \left\lfloor \frac{1}{\min(x, 1-x)} \right\rfloor + 1$)

Alors $x \in \left] \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n} \right]$ donc en particulier $x \in \bigcup_{k \geq 1} \left] \frac{1}{k}; 1 - \frac{1}{k} \right]$.

D'où l'inclusion, et donc l'égalité.

b) $\bigcap_{n \geq 1} \left] \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n} \right] = \emptyset$ puisque pour $n=1$, $\left] \frac{1}{1}; 1 - \frac{1}{1} \right] = \left] 1; 0 \right] = \emptyset$.

c) $\{0\}$

d) $\{-1; 1\}$.

Exo 23

b) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$

la propriété (P_n) suivante :

$$(P_n) : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

• Initialisation : $n=1$.

On a $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = 1^2 = 1$ pour $n=1$

D'autre part : $\frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} \times \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$. D'où (P_1) .

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que (P_n) est vraie. Montrons (P_{n+1}) .

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 = (1^2 + \dots + n^2) + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \text{selon l'hypothèse de récurrence}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+n)}{6} + \frac{(n+1)(6n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$\text{D'autre part : } \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+4n+3n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

D'où l'égalité : (P_{n+1}) est bien vraie.

D'où l'hérédité, ce qui conclut la récurrence.

Exo 28

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On va plutôt montrer que : $a \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, |a| \geq \varepsilon)$

On suppose $a \neq 0$. On cherche $\varepsilon > 0$ tel que $|a| \geq \varepsilon$.

La valeur $\varepsilon = |a|$ convient puisque $|a| > 0$ ($a \neq 0$).

D'où l'implication et donc sa contraposée : $(\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$

2. Supposons que pour tout choix de trois entiers parmi $n_1, n_2, \dots, n_9$, leur somme est strictement inférieure à 30.

Alors en particulier :

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + n_3 &< 30 \\ n_4 + n_5 + n_6 &< 30 \\ n_7 + n_8 + n_9 &< 30 \end{aligned}$$

D'où $n_1 + \dots + n_9 < 30 + 30 + 30 = 90$.

On a bien montré la contraposée du résultat cherché.

Exo 29

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On veut montrer que $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$

Supposons $x \notin \mathbb{Q}$ et, par l'absurde, $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$.

Alors on peut écrire $\sqrt{x} = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Mais alors $x = \sqrt{x}^2 = \frac{a^2}{b^2} \in \mathbb{Q}$. C'est absurde

(on aurait aussi pu faire par contraposée...). D'où le résultat.

2. Soit $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrons par l'absurde que $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Supposons par l'absurde que $x + y \in \mathbb{Q}$. Alors on peut écrire $x + y = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Mais comme $x \in \mathbb{Q}$, on peut écrire $x = \frac{c}{d}$ avec $c, d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$.

Ainsi, $\frac{c}{d} + y = \frac{a}{b}$. D'où $y = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} \in \mathbb{Q}$.

C'est absurde. D'où $x + y \notin \mathbb{Q}$.