

TD Ch 0 – Logique et raisonnement

Corrigé

I. Logique élémentaire

1. Négations :

a) $x \geq 1 \implies x > 0$

b) $x < -10 \implies x^2 \geq 4$

c) $x \in \mathbb{Q} \iff \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$

2. Négations :

a) (11 n'est pas premier) et $(11 \leq 3)$

b) (49 n'est pas premier) ou $(49 \leq 3)$

c) (exp n'est pas paire) et $(2 \neq 3)$

d) (exp n'est pas croissante) et $(\sqrt{2} > 2 \text{ ou } 2^{-2} = -4)$

a) est vraie (11 est premier et $11 > 3$), b) est fausse (49 n'est pas premier).

c) est vraie puisque exp n'est pas une fonction paire. d) est vraie puisque exp est une fonction croissante.

3. • non a) : $(x > 5)$ ou $(\exp(x) \leq 0)$. a) est vraie pour $x \in]-\infty, 5]$.

• non b) : $(x \in \mathbb{N})$ et $(x \notin \mathbb{Q})$. b) est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par disjonction de cas : soit x est entier, auquel cas $x \in \mathbb{Q}$, soit il n'est pas entier, auquel cas $x \notin \mathbb{N}$.

• non c) : $(x \neq 1)$ et $(x < 1)$, i.e. $x < 1$. Ainsi, c) est l'assertion $x \geq 1$, donc c) est vraie pour $x \in [1, +\infty[$.

1. table de vérité de $A \text{ xor } B$:

4.

		B		
			0	1
A				
	0		0	1
	1		1	0

2. $(A \text{ xor } B)$ est (entre autres) équivalent à :

$(A \text{ et } (\text{non } B)) \text{ ou } ((\text{non } A) \text{ et } B)$

où encore à :

$(A \text{ ou } B) \text{ et } (\text{non}(A \text{ et } B))$

```

1 def xor(a,b):
2     if a and not b:
3         return True
4     elif b and not a:
5         return True
6     else:
7         return False

```

5. Les connecteurs logiques appropriés sont les suivants :

a) Noël $\implies$ Décembre

b) Bissextile $\iff$ 29 Février

c) Belgique $\leftarrow$ Bruxelles

d) $x^2 = 9 \iff x = 3$

e) $\sqrt{2x^2 - 5} = 0 \iff 2x^2 - 5 = 0$

f) $x+y \geq 0 \iff (x \geq 0 \text{ et } y \geq 0)$

g) $\sin(x) = 0 \iff$ (il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = k\pi$)

h) n est un multiple de 4 ou de 6 $\implies n$ est pair

i) $y^2 = 1 - y \iff e^{y^2} = \frac{e}{e^y}$

j) Supposons $x \leq y$. $f(x) \leq f(y) \iff f$ est croissante.

6. Les contraposées sont :

a) $((u_n) \text{ diverge}) \implies ((u_n) \text{ n'est pas croissante ou n'est pas majorée})$

b) $(f \text{ n'est pas croissante sur } I) \implies (\text{il existe un élément } x \in I \text{ tel que } f'(x) < 0)$

II. Quantificateurs

7.

- a) Faux (contre-exemple : $x = -1$). Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, x < 0$
 - b) Vrai (exemple : $a=0$). Négation : $\forall a \in \mathbb{R}, a < 0$
 - c) Vrai, en prenant $y = \sqrt{x}$. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}, x \neq y^2$
 - d) Faux, on n'aura jamais $0 = y^2 = 1$. Négation : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}_+, x \neq y^2$
 - e) Faux (contre-exemple : $x=-1$). Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+, x \neq y^2$
 - f) Vrai, en prenant par exemple $\epsilon = \frac{1}{2t}$. Négation : $\exists t \in \mathbb{R}_+, \forall \epsilon > 0, \frac{1}{t} \leq \epsilon$
 - g) Vrai, c'est la règle du produit nul. Négation : $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, (ab = 0) \text{ et } (a \neq 0 \text{ et } b \neq 0)$
-

8.

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0$.
 - b) $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, f(-x) \neq -f(x)$.
 - c) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
 - d) $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y \implies f(x) \leq f(y))$. Négation : $\exists x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y \text{ et } f(x) > f(y))$.
 - e) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = n$. Négation : $\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq n$.
 - f) $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 2 \implies x \leq 0)$. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, (f(x) = 2 \text{ et } x > 0)$.
 - g) $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y)$. Négation : $\exists x, y \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(y)$.
Autre possibilité : $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C$. Négation : $\forall C \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq C$.
 - h) $\exists T \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$. Négation : $\forall T \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}, f(x + T) \neq f(x)$.
-

9.

- $\text{non}(A_1(f)) : \forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > M$.

Cette assertion se traduit par : "la fonction f est **majorée**". Elle est fausse pour l'exponentielle, et vraie pour le cosinus et la constante 1. En effet :

- Pour la fonction exponentielle, avec $M > 0$ quelconque, $x = \ln(M) + 1$ fournit un contre-exemple.
- Pour le cosinus et pour la constante 1, $M = 1$ convient.

- $\text{non}(A_2(f)) : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$.

Cette assertion se traduit en fait par : "la fonction f n'est pas constante"! Elle est fausse pour exp et cos, et vraie pour la fonction constante égale à 1.

Pour exp et cos, par exemple, $x = -\pi$ et $y = 0$ conviennent.

- $\text{non}(A_3(f)) : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+, f(x) < f(y)$. Cette assertion est difficile à traduire!

Elle est vraie pour la fonction constante égale à 1 et pour la fonction cosinus. En effet, pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque, il suffit de prendre $y = \pi$ et on a bien $f(x) \geq f(y)$.

Elle est fausse pour l'exponentielle, et on peut prendre comme contre-exemple $x = -1$: on sait que pour tout $y \geq 0$, $\exp(y) \geq 1 > \exp(-1)$ par stricte croissance de exp.

10. Pour rappel, l'assertion c) se réécrit : $x < 1$ ou $x = 1$, c'est-à-dire $x \leq 1$. On a donc les ensemble de "solutions" suivants :

- a) $\mathbb{R}_+$
 - b) $\emptyset$
 - c) $] -\infty, 1]$
-

11 (*)

- a) Négation : $\forall l \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, u_n \notin [l - \epsilon ; l + \epsilon]$

L'assertion a) signifie en fait que la suite (u_n) converge! Le réel l convenable sera alors la limite de la suite.

- b) Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists y \in \mathbb{R}, (|x - y| < \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \epsilon)$

L'assertion b) signifie en fait que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$!

III. Ensembles

Dans toute cette partie, E est un ensemble, et A, B, C sont des parties de E .

12.

- | | | | |
|--|--|---|-----------------------|
| a) $0 \notin \mathbb{N}^*$ | b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ | c) $3 \in \mathbb{R}_+$ | d) $2 \notin [-5; 2[$ |
| e) $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{R}^*$ | f) $0 \notin \emptyset$ | g) $\{1, 2, 1, 5\} \subset \{5, 4, 3, 2, 1\}$ | |
| h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 9\} \not\subset [3; +\infty[$ (on a en fait l'inclusion inverse). | i) $\{-5\} \subset \{x \in \mathbb{R} \mid x = 5\}$ | | |
| j) $\pi \in \mathbb{Q} \cup \mathbb{R}^+$ | k) $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin [-1; 1] \cap \mathbb{Q}$ | l) $3 \in]-\infty; 3[\cup]-3; +\infty[$ | |

13. Il n'y a pas qu'une bonne réponse dans cet exercice, il y en a une infinité! Il s'agit simplement de faire attention que chaque élément du couple ou du n -uplet proposé est bien dans le bon ensemble. Par exemple :

- | | | | |
|--------------------|--------------------------------|----------------|-------------|
| a) $(4, \sqrt{2})$ | b) $(2, \frac{-3}{5}, 0, 0.4)$ | c) $(-\pi, 2)$ | d) $(1, 0)$ |
|--------------------|--------------------------------|----------------|-------------|

14. N'oublions pas que A et B sont des parties de E . On a :

- | | | | |
|--------------------------------------|---|--|---------------------------------------|
| a) $A \cap \overline{A} = \emptyset$ | b) $A \cup \overline{A} = E$ | c) $A \cup (A \cap B) = A$ | d) $B \cup (A \cup \overline{B}) = E$ |
| e) $(E \cup A) \cap B = B$ | f) $(A \cup \emptyset) \cup (B \cap \emptyset) = A$ | g) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$ | |

Ne pas hésiter à faire un dessin pour se visualiser!

15. On a :

- | | |
|---|--|
| a) $\{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\} = A \cap B$ | b) $\{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} = A \cup B$ |
| c) $\{x \in E \mid x \in A \text{ et non}(x \in B)\} = A \cap \overline{B} = A \setminus B$ | d) $\{x \in E \mid x \in A \implies x \in B\} = \overline{A} \cup B$ |

en se rappelant que $(x \in A) \implies (x \in B)$ s'écrit : $(x \notin A) \text{ ou } (x \in B)$.

16.⁵

- | | | |
|--------------------------------------|---|--|
| a) $\bigcup_{i=1} [i, 2i] = [1, 10]$ | b) $\bigcup_{i=0}^n [i-1, i+1] = [-1, n+1]$ | c) $\bigcap_{k=1}^n [-k, k] = [-1, 1]$ |
|--------------------------------------|---|--|

17 (*). • a) On procède par double implication.

- On suppose d'abord que $A \cup B = E$, et on montre que $\overline{B} \subset A$. Soit donc $x \in \overline{B}$.
On a donc $x \in E$ mais $x \notin B$. Comme $E = A \cup B$, on a $x \in A \cup B$, c'est-à-dire $x \in A$ ou $x \in B$.
Comme $x \notin B$, on a nécessairement $x \in A$. D'où : $\overline{B} \subset A$.
D'où l'implication directe.
- On suppose désormais que $\overline{B} \subset A$, et on montre que $A \cup B = E$. On a évidemment $A \cup B \subset E$.
Montrons que $E \subset A \cup B$.
Soit $x \in E$ quelconque. Si $x \in B$, on a bien $x \in A \cup B$.
Sinon, $x \notin B$. Mais comme $\overline{B} \subset A$, on a alors $x \in A$, et donc encore $x \in A \cup B$.
Ainsi, dans tous les cas, $x \in A \cup B$. D'où $A \cup B = E$.
D'où l'implication réciproque.
- Les deux implications sont vraies, donc l'équivalence est bien vraie!
- b) On pourrait procéder de manière similaire, par double implication. Je vais plutôt passer par des équivalences successives en utilisant la question a).
On a : $A \cap B = \emptyset \iff \overline{A \cap B} = E \iff \overline{B \cup \overline{A}} = E$.
En appliquant la question a) à $\overline{B}$ et $\overline{A}$, ceci équivaut à : $\overline{\overline{A}} \subset \overline{\overline{B}}$.
Par équivalences successives, on a donc bien montré que $(A \cap B = \emptyset) \iff (A \subset \overline{B})$.

- c) On procède par double implication.
 - L'implication réciproque est évidente : si $A = B$, alors $A \cup B = A \cap B = A = B$.
 - Supposons que $A \cup B = A \cap B$. Alors $A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$. De même : $B \subset A \cup B = A \cap B \subset A$. On a $A \subset B$ et $B \subset A$, donc $A = B$. D'où l'implication directe.
 - On a bien prouvé l'équivalence cherchée, par double implication.

18 (*). 1. • $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \iff (\exists n \in \mathbb{N}, x \in A_n)$

• $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \iff (\forall n \in \mathbb{N}, x \in A_n)$

2. Ne pas hésiter à faire des dessins, au moins pour les intervalles !

a) $\bigcup_{n \geq 1} \left] \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n} \right] =]0, 1[$

b) $\bigcap_{n \geq 1} \left] \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n} \right] = \emptyset$

c) $\bigcap_{n \geq 1} \{p \in \mathbb{Z} \mid n \text{ est un multiple de } p\} = \{1\}$

d) $\bigcup_{r \in [0,1]} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ est l'union de tous les cercles de centre l'origine du plan et de rayon ≤ 1 . Il s'agit donc du **disque de centre l'origine et de rayon 1** !

IV. Raisonnements

19. Je choisis le billet 2 ! En effet, on procède par **disjonction de cas** :

- Si 3 est gagnant, alors 4 est perdant (v), mais alors 2 est gagnant (ii).
- Si 3 est perdant, alors 5 est perdant aussi (iii), mais alors 1 est gagnant (i), et donc 2 est gagnant (iv).
- Dans tous les cas, le billet 2 est gagnant !

20. 1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On montre plutôt que $(a \neq 0) \implies (\exists \epsilon > 0, |a| \geq \epsilon)$.

On suppose donc que $a \neq 0$, et on cherche un ϵ convenable.

Comme $a \neq 0$, on a $|a| > 0$, et donc $\epsilon = |a|$ convient !

Ainsi, la contraposée de l'assertion est vraie, donc l'implication de l'énoncé est encore vraie.

On a bien montré : $(\forall \epsilon > 0, |a| < \epsilon) \implies a = 0$.

2. Soit $n_1, n_2, \dots, n_9 \in \mathbb{N}$. On va plutôt montrer la contraposée, c'est-à-dire :

"la somme de trois de ces entiers est toujours inférieure strictement à 30" $\implies (n_1 + \dots + n_9 \neq 90)$.

Supposons donc que la somme de trois de ces entiers est toujours inférieure strictement à 30. En particulier, $n_1 + n_2 + n_3 < 30$, $n_4 + n_5 + n_6 < 30$ et $n_7 + n_8 + n_9 < 30$.

Ainsi : $n_1 + \dots + n_9 < 30 + 30 + 30 = 90$: on a bien $n_1 + \dots + n_9 \neq 90$.

La contraposée est vraie, donc l'implication d'origine aussi.

21. 1. Supposons par l'absurde qu'il existe un nombre irrationnel positif x dont la racine carrée soit rationnelle. On sait que $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$, et que $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$.

On peut alors écrire $\sqrt{x} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$.

En élevant au carré, on obtient $x = \frac{p^2}{q^2}$ où $p^2, q^2 \in \mathbb{Z}$, et $q^2 \neq 0$.

Ainsi, $x \in \mathbb{Q}$: c'est absurde ! D'où le résultat.

2. Supposons par l'absurde qu'on ait un nombre rationnel $x \in \mathbb{Q}$ et un nombre irrationnel $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dont la somme soit rationnelle.

On sait que $x + y = z$ avec $z \in \mathbb{Q}$. Mais alors $y = z - x$ où $z \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{Q}$, donc $y \in \mathbb{Q}$. C'est absurde !

3. Supposons par l'absurde que le plus grand côté du rectangle ait une longueur inférieure ou égale à 13 m . Alors les côtés ont pour longueur (en mètres) x et y avec $x, y \leq 13$.

Mais alors l'aire vaut $170 = xy < 13 \times 13 = 169$: c'est absurde !

V. Récurrences

22. Soit $a \in \mathbb{R}_+$ fixé.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, je note P_n la propriété : " $(1+a)^n \geq 1+na$ ".

- **Initialisation** ($n=0$). On sait que $(1+a)^0 = 1$ et $1+0a = 1$, donc on a bien $(1+a)^0 \geq 1+0a$: P_0 est vraie.
 - **Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.** Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est encore vraie.
On sait que $(1+a)^n \geq 1+na$. On a alors :
 $(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n \geq (1+a)(1+na)$ puisque $1+a > 0$.
Or $(1+a)(1+na) = 1+na+a+na^2 = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$ puisque $na^2 \geq 0$.
Ainsi, on a bien $(1+a)^{n+1} \geq (1+a)(1+na) \geq 1+(n+1)a$: la propriété P_{n+1} est encore vraie, d'où l'hérédité.
 - **Conclusion.** Par principe de récurrence, on a bien montré que : $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1+na$.
-

23. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, je note P_n la propriété : " $u_n = \frac{2}{2n+1}$ ".

- **Initialisation** ($n=0$). On sait que $u_0 = 2$ et $\frac{2}{2 \times 0 + 1} = 2$, donc P_0 est bien vraie.
 - **Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.** Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est encore vraie.
On sait que $u_n = \frac{2}{2n+1}$. On a alors :
$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+1+2}{2n+1}} = \frac{2}{2n+3} = \frac{2}{2(n+1)+1}.$$
Ainsi, la propriété P_{n+1} est encore vraie, d'où l'hérédité.
 - **Conclusion.** Par principe de récurrence, on a bien montré que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{2n+1}$.
-

24. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, je note P_n la propriété : " $0 < u_n \leq 1$ ".

- **Initialisation** ($n=1$). On sait que $u_1 = \frac{1+2u_0}{2+u_0} = \frac{1}{2} \in]0, 1]$, donc P_1 est bien vraie.
 - **Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.** Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est encore vraie.
On sait que $0 < u_n \leq 1$, et que $u_{n+1} = \frac{1+2u_n}{2+u_n}$.
Comme $u_n > 0$, on a $1+2u_n > 0$ et $2+u_n > 0$, donc $u_{n+1} > 0$.
De plus, on a : $u_{n+1} \leq 1 \iff u_{n+1} - 1 \leq 0$.
Or $u_{n+1} - 1 = \frac{1+2u_n - (2+u_n)}{2+u_n} = \frac{u_n - 1}{2+u_n}$.
Comme $u_n \leq 1$, on a $u_n - 1 \leq 0$. Comme $u_n > 0$, on a $2+u_n > 0$.
Finalement, on a bien $u_{n+1} - 1 \leq 0$, donc $u_{n+1} \leq 1$.
Ainsi, la propriété P_{n+1} est bien vraie, d'où l'hérédité.
 - **Conclusion.** Par principe de récurrence, on a bien montré que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq 1$.
-

25. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, je note P_n la propriété : " $u_n = -3^n + 4$ ".

- **Initialisation** ($n=0$). On sait que $u_0 = 3$ et $-3^0 + 4 = -1 + 4 = 3$, donc P_0 est bien vraie.
 - **Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.** Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est encore vraie.
On sait que $u_n = -3^n + 4$. On a alors :
 $u_{n+1} = 3u_n - 8 = 3(-3^n + 4) - 8 = -3 \times 3^n + 12 - 8 = -3^{n+1} + 4$.
Ainsi, la propriété P_{n+1} est encore vraie, d'où l'hérédité.
 - **Conclusion.** Par principe de récurrence, on a bien montré que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -3^n + 4$.
-

26. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, je note P_n la propriété : " $u_n \geq n$ ".

- **Initialisation** ($n=0$). On sait que $u_0 \in \mathbb{N}$, donc on a bien $u_0 \geq 0$. Ainsi, P_0 est bien vraie.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est encore vraie. Comme la suite (u_n) est strictement croissante et à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \geq u_n + 1$. Mais alors comme $u_n \geq n$ (Hypothèse de récurrence) : $u_{n+1} \geq u_n + 1 \geq n + 1$. Ainsi, la propriété P_{n+1} est encore vraie, d'où l'hérédité.
- **Conclusion.** Par principe de récurrence, on a bien montré que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$.

- 27.** 1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, je note P_n la propriété : " $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ".
- **Initialisation** ($n = 1$). Pour $n = 1$, on a un seul terme dans la somme, 1. De plus, $\frac{1 \times (1+1)}{2} = 1$, donc l'égalité est bien vraie : P_1 est vraie.
 - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est encore vraie. On sait que $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. On a alors :

$$1 + 2 + \dots + (n+1) = 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$
Ainsi, la propriété P_{n+1} est encore vraie, d'où l'hérédité.
 - **Conclusion.** Par principe de récurrence, on a bien montré que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, je note P_n la propriété : " $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ".
- **Initialisation** ($n = 1$). Pour $n = 1$, on a un seul terme dans la somme, $1^2 = 1$. De plus, $\frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = 1$, donc l'égalité est bien vraie : P_1 est vraie.
 - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est encore vraie. On sait que $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On a alors :

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6}{6} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}.$$
D'autre part, on a : $\frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$.
On retrouve bien l'égalité. Ainsi, la propriété P_{n+1} est encore vraie, d'où l'hérédité.
 - **Conclusion.** Par principe de récurrence, on a bien montré que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

28. Idée : On calcule les premiers termes pour se faire une idée !

On a $u_0 = 1$, donc $u_1 = \frac{1}{1}(u_0^2) = 1$, puis $u_2 = \frac{1}{2}(u_0^2 + u_1^2) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$.

Puis $u_3 = \frac{1}{3}(1^2 + 1^2 + 1^2) = 1$. On peut conjecturer que la suite est constante égale à 1 ! Montrons-le par **récurrence forte**.

- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, je note P_n la propriété : " $u_n = 1$ ".
- **Initialisation** ($n = 0$). On sait que $u_0 = 1$, donc P_0 est bien vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que les propriétés $P_0, \dots, P_n$ sont **toutes** vraies et montrons que P_{n+1} est encore vraie.
On a $u_{n+1} = \frac{1}{n+1}(u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2) = \frac{1}{n+1}(1^2 + 1^2 + \dots + 1^2)$ par hypothèse de récurrence forte.
Or on a n termes dans la somme, donc $1^2 + \dots + 1^2 = n \times 1 = n$. Ainsi : $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \times (n+1) = 1$.
La propriété P_{n+1} est donc encore vraie, d'où l'hérédité.

- **Conclusion.** Par principe de récurrence, on a bien montré que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$.

29 (*). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la propriété : " $u_n \geq 0$ (donc $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ existe) et $u_{n+1} > u_n$ ".

- **Initialisation** ($n = 0$). On sait que $u_0 = 1 \geq 0$, et donc u_1 existe bien, et $u_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} > 1$. On a bien $u_1 > u_0$. Ainsi, P_0 est bien vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est encore vraie. On a u_{n+1} qui existe bien, et qui vaut $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$, donc $u_{n+1} \geq 0$. (qui implique en particulier que $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} + 1}$ a bien un sens). De plus, $u_{n+1} > u_n$, donc on a encore $u_{n+1} + 1 > u_n + 1 > 0$, et donc en passant à la racine carrée : $\sqrt{u_{n+1} + 1} > \sqrt{u_n + 1}$, c'est-à-dire $u_{n+2} > u_{n+1}$. Ainsi, la propriété P_{n+1} est encore vraie, d'où l'hérédité.
- **Conclusion.** Par principe de récurrence, on a bien montré que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et strictement croissante !

30. Le résultat prétendument démontré est **évidemment faux**.

La propriété considérée ici est P_n : " n points distincts du plan sont toujours alignés". L'initialisation ($n = 2$) est correcte et vraie.

L'erreur se situe dans l'hérédité, à la partie : les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ contiennent toutes les deux les points A_2 et A_3 . En effet, cette phrase n'est vraie que pour $n \geq 3$ et par pour $n \geq 2$!

Ainsi, l'hérédité ne fonctionne pas pour tous les $n \geq 2$, ce qui invalide la récurrence.

31 (*). En suivant l'indication, on commence par remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+2} + x^n + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+2}}$, et donc :

$$x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} = \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)$$

Passons à la récurrence double.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la propriété : " $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ ".

- **Initialisation** ($n = 0$ et $n = 1$). On sait que $x^0 + \frac{1}{x^0} = 1 + \frac{1}{1} = 2 \in \mathbb{Z}$, et selon l'énoncé, $x^1 + \frac{1}{x^1} \in \mathbb{Z}$. Ainsi, P_0 et P_1 sont bien vraies.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que P_n et P_{n+1} sont vraies et montrons que P_{n+2} est encore vraie. D'après ce qu'on a montré grâce à l'indication, on a : $x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} = \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)$ où $\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) \in \mathbb{Z}$ (HR), $\left(x + \frac{1}{x}\right) \in \mathbb{Z}$ (énoncé) et $\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) \in \mathbb{Z}$ (HR). Ainsi, on a encore $x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} \in \mathbb{Z}$, et donc P_{n+2} est encore vraie, d'où l'hérédité.
- **Conclusion.** Par principe de récurrence, on a bien montré que la suite $\forall n \in \mathbb{N}, x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.