

TD Ch 0 – Logique et raisonnement

I. Logique élémentaire

1. Vous voulez acheter un billet de loterie. Le buraliste, logicien à ses heures perdues, vous présente cinq billets numérotés de 1 à 5 et déclare :

- (i) si 5 est perdant, alors 1 est gagnant
- (ii) si 4 est perdant, alors 2 est gagnant
- (iii) si 3 est perdant, alors 5 aussi
- (iv) si 1 est gagnant, alors 2 aussi
- (v) si 3 est gagnant, alors 4 est perdant

Quel billet choisissez-vous ?

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Écrire les assertions suivantes à l'aide des symboles logiques.

- a) Si x est supérieur ou égal à 1, alors x est strictement positif.
- b) Pour que x^2 soit supérieur ou égal à 4, il suffit que x soit strictement inférieur à -10 .
- c) x est rationnel si et seulement si son inverse l'est.

3. Nier (= donner la négation de) chacune des assertions suivantes et dire si elle est vraie ou fausse.

- a) (11 est premier) ou $(11 > 3)$
- b) (49 est premier) et $(49 > 3)$
- c) $(\exp \text{ est paire}) \implies (2 = 3)$
- d) $(\exp \text{ est croissante})$ ou non $(\sqrt{2} > 2 \text{ ou } 2^{-2} = -4)$

4. Nier chacune des assertions suivantes et dire pour quelles valeurs de x elle est vraie.

- a) $(x \leq 5)$ et $(\exp(x) > 0)$
- b) $\text{non}(x \in \mathbb{N})$ ou $(x \in \mathbb{Q})$
- c) $(x \neq 1) \implies (x \geq 1)$

5. On définit la fonction **ou exclusif**, notée xor , de la manière suivante.

Si A et B sont deux assertions, alors $A \text{ xor } B$ est vraie si une et une seule des deux assertions A, B est vraie, et fausse sinon.

- 1. Écrire la table de vérité de $A \text{ xor } B$, sur le modèle de celles vues en cours.
- 2. Réécrire l'assertion $A \text{ xor } B$ en utilisant uniquement les symboles logiques vus en cours.
- 3. Écrire une fonction Python `xor(a,b)`, qui prend en argument deux booléens `a` et `b`, en renvoie le booléen correspondant à $a \text{ xor } b$.

6. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Compléter les pontillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftarrow$, $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$.

- a) $x^2 = 9 \dots x = 3$
- b) $\sqrt{2x^2 - 5} = 0 \dots 2x^2 - 5 = 0$
- c) $x + y \geq 0 \dots (x \geq 0 \text{ et } y \geq 0)$
- d) $\sin(x) = 0 \dots \exists k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi$
- e) n est pair $\dots n$ est un multiple de 4 ou de 6
- f) $y^2 = 1 - y \dots e^{y^2} = \frac{e}{e^y}$
- g) Supposons $x \leq y$. Alors $f(x) \leq f(y) \dots f$ est croissante.

7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I .

Écrire la contraposée des assertions suivantes :

- a) $((u_n) \text{ est croissante et majorée}) \implies ((u_n) \text{ converge})$
- b) $(\forall x \in I, f'(x) \geq 0) \implies (f \text{ est croissante sur } I)$

8 (*). On considère trois assertions A, B et C , et les assertions suivantes :

- (i) $(A \implies B) \implies C$
- (ii) $A \implies (B \implies C)$

Montrer que $(i) \implies (ii)$. Les assertions (i) et (ii) sont-elles équivalentes ?

II. Quantificateurs

9. Nier chacune des assertions suivantes, puis dire si elle est vraie ou fausse.

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ b) $\exists a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ c) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$
d) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+, x = y^2$ e) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}^+, x = y^2$ f) $\forall t \in \mathbb{R}^+, \exists \epsilon > 0, \frac{1}{t} \geq \epsilon$
g) $\forall t \in \mathbb{R}^+, \exists \epsilon > 0, \frac{1}{t} > \epsilon$ h) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (ab = 0) \implies (a = 0 \text{ ou } b = 0)$
-

10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Écrire les assertions suivantes à l'aide des quantificateurs, puis donner leur négation.

- a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est strictement positif. b) f est croissante sur $\mathbb{R}$.
c) Il existe un réel dont l'image par f est négative. d) f est paire.
e) f ne s'annule jamais. f) f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.
g) f est constante sur $\mathbb{R}$. h) f est périodique.
-

11. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On considère les assertions suivantes :

- $A_1(f) : \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$
- $A_2(f) : \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) < f(y)$
- $A_3(f) : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq f(y)$

Donner la négation de ces assertions, et dire si elles sont vraies ou fausses pour : la fonction exponentielle, la fonction cosinus et la fonction constante égale à 1.

12. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ les assertions suivantes sont-elles vraies ?

- a) $\exists z \in \mathbb{R}, z^2 = x$ b) $\forall y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq 1$ c) $x \geq 1 \implies x \neq 1$
-

13 (*). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Nier les assertions suivantes. À votre avis, que signifient-elles ?

- a) $\exists l \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in [l - \epsilon; l + \epsilon]$
b) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon)$
-

III. Ensembles

Dans toute cette partie, E est un ensemble, et A, B, C sont des parties de E .

14. Compléter avec $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$.

- | | | | |
|--|---|--|----------------------|
| a) $0 \dots \mathbb{N}^*$ | b) $\mathbb{Z} \dots \mathbb{Q}$ | c) $3 \dots \mathbb{R}^+$ | d) $2 \dots [-5; 2[$ |
| e) $\mathbb{N} \dots \mathbb{R}^*$ | f) $0 \dots \emptyset$ | g) $\{1, 2, 1, 5\} \dots \{5, 4, 3, 2, 1\}$ | |
| h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 9\} \dots [3; +\infty[$ | i) $\{-5\} \dots \{x \in \mathbb{R} \mid x = 5\}$ | | |
| j) $\pi \dots \mathbb{Q} \cup \mathbb{R}^+$ | k) $\frac{\sqrt{2}}{2} \dots [-1; 1] \cap \mathbb{Q}$ | l) $3 \dots] - \infty; 3[\cup] - 3; +\infty[$ | |
-

15. Donner un élément de chacun des produits cartésiens suivants :

- | | | | |
|-------------------------------|-------------------|---------------------------------------|-------------------------------|
| a) $\mathbb{N} \times]1, 2[$ | b) $\mathbb{Q}^4$ | c) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ | d) $\{-1; 1\} \times]-1; 1[$ |
|-------------------------------|-------------------|---------------------------------------|-------------------------------|
-

16. Écrire les ensembles suivants de la manière la plus simple possible :

- | | | | |
|------------------------|---|---------------------------------------|------------------------------|
| a) $A \cap \bar{A}$ | b) $A \cup \bar{A}$ | c) $A \cup (A \cap B)$ | d) $B \cup (A \cup \bar{B})$ |
| e) $(E \cup A) \cap B$ | f) $(A \cup \emptyset) \cup (B \cap \emptyset)$ | g) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$ | |
-

17. Soient $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\}$ et $D_2 = \{(t + 1, 4t + 3), t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $D_1 = D_2$.

18. Écrire les ensembles suivants à l'aide des notations ensemblistes (complémentaire, union, intersection) et des ensembles A et B .

- | | |
|---|---|
| a) $\{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$ | b) $\{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ |
| c) $\{x \in E \mid x \in A \text{ et non}(x \in B)\}$ | d) $\{x \in E \mid x \in A \implies x \in B\}$ |
-

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire de la manière la plus simple possible les ensembles suivants :

- | | | |
|-------------------------------------|------------------------------|---|
| a) $\bigcup_{i=1}^n [i - 1; i + 1]$ | b) $\bigcap_{i=1}^n [-i; i]$ | c) $\bigcup_{r>0} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ |
|-------------------------------------|------------------------------|---|
-

20. Montrer les équivalentes suivantes :

- | | | |
|--|--|---|
| a) $(A \cup B = E) \iff (\bar{B} \subset A)$ | b) $(A \cap B = \emptyset) \iff (A \subset \bar{B})$ | c) $(A \cup B = A \cap B) \iff (A = B)$ |
|--|--|---|
-

21 (*). Complément : on peut aussi définir des unions ou intersections d'un nombre *infini* de parties de E . Supposons qu'on se donne, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A_n une partie de E .

- Écrire les assertions $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ à l'aide des quantificateurs $\forall$ et $\exists$.
- Écrire les ensembles suivants de la manière la plus simple possible.

- | | |
|---|---|
| a) $\bigcup_{n \geq 1} \left] \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n} \right]$ | b) $\bigcap_{n \geq 1} \left] \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n} \right]$ |
| c) $\bigcap_{n \geq 1} \{p \in \mathbb{Z} \mid n \text{ divise } p\}$ | d) $\bigcap_{n \geq 1} \{p \in \mathbb{Z} \mid p \text{ divise } n\}$ |
-

IV. Récurrences

22. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$.

23. Montrer par récurrence les formules suivantes, pour $n \in \mathbb{N}^*$ (à retenir car elles interviennent souvent !) :

a) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

24. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} (u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2)$. Déterminer le terme général de cette suite, en justifiant soigneusement.

25 (*). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que les termes u_n sont tous définis (la racine carrée existe), et que la suite est strictement croissante.

26. On va montrer par récurrence sur $n \geq 2$ que n points distincts du plan sont toujours alignés. C'est évidemment vrai pour $n = 2$. Supposons que le résultat est vrai au rang n , et donnons-nous $n + 1$ points distincts $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ du plan. Par hypothèse de récurrence, les points $A_1, \dots, A_n$ sont sur une même droite $\mathcal{D}$, et de même les points $A_2, \dots, A_{n+1}$ sont sur une même droite $\mathcal{D}'$. Or les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ contiennent toutes les deux les points A_2 et A_3 , qui sont distincts, donc elles sont confondues : $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$. Il en résulte que les points $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés, ce qui termine la récurrence. **Qu'est ce qui ne va pas dans cette preuve ?**

Méthode (La récurrence double)

Soit P_n une assertion qui dépend de $n \in \mathbb{N}$. Pour montrer que l'assertion P_n est vraie pour tout entier $n \geq 0$, par **récurrence double** :

1. **Initialisation** : On montre que les assertions P_0 et P_1 sont vraies.
2. **Hérédité (ou "itération")** : On fixe $n \geq 0$, et on suppose que P_n et P_{n+1} sont vraies. Sous cette hypothèse, on montre que P_{n+2} est aussi vraie.

27. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $F_0 = F_1 = 1$, et pour tout $n \geq 0$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est un entier strictement positif.
 2. En déduire que la suite (F_n) est strictement croissante.
 3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $F_n > (\sqrt{2})^{n-1}$.
-

V. Autres raisonnements classiques

28. Montrer les résultats suivants à l'aide d'une contraposée.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. $(\forall \epsilon > 0, |a| < \epsilon) \implies a = 0$.
 2. Soit $n_1, n_2, \dots, n_9 \in \mathbb{N}$ tels que $n_1 + \dots, n_9 = 90$. Alors il existe trois de ces entiers dont la somme est supérieure à 30.
-

29. Montrer les résultats suivants à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

1. La racine carrée d'un nombre irrationnel positif est toujours irrationnelle.
 2. La somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
 3. Un rectangle a pour aire 170 m^2 . Montrer que son plus grand côté a une longueur strictement supérieure à 13 m .
-