

TD Ch 1 – Manipuler des réels

I. Calculs

Tout est à réaliser **sans calculatrice** !

1. Calculer rapidement, si possible de tête :

$$A = 72 \times 57 - 72 \times 37$$

$$B = 94 \times 73 + 94 \times 27$$

$$C = 23 \times 41 - 23 \times 71$$

$$D = 22 \times 99$$

$$E = 25 \times 98$$

$$F = 91 \times 89$$

$$G = \left(9 \times \left(4 + \frac{1}{5}\right)\right) + \left(9 \times \left(3 + \frac{4}{5}\right)\right)$$

$$H = 22^2 - 2^2$$

$$I = 6^2 - 40^2$$

$$J = 89^2$$

$$K = 72 \times 68$$

$$L = 7,9^2 - 2,1^2$$

2. Soient $a, b > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Écrire sous forme simplifiée :

$$A = \frac{7}{6} - \frac{9}{4}$$

$$B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}$$

$$C = \frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{4}{5}}$$

$$D = \frac{3^7 \times 3^{-3}}{3^4}$$

$$E = \frac{3}{7} \times \left(\frac{11}{3} - \frac{12}{5}\right) + \left(\frac{3}{7} - \frac{11}{3}\right) \times \frac{12}{5}$$

$$F = \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$G = \sqrt{9800}$$

$$H = \frac{a^{-4}b^3a^3}{(ab^2)^{-2}}$$

$$I = \frac{1}{a^{2n}} \frac{(ab^3)^n (a^{2n} - b^{2n})}{a^n + b^n}$$

$$J = \sqrt{0,62^2}$$

$$K = \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}$$

$$L = |(-1)^n \sqrt{3}|$$

$$M = 3^n + 3^{n+1}$$

$$N = 5 \times \frac{1}{\frac{1}{5^n}}$$

$$O = \frac{a^n - a^{2n}}{(2a)^n}$$

$$P = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$Q = \frac{(a^{n^2})^2}{a^n}$$

3. Écrire sous la forme $a + b\sqrt{n}$ avec a, b rationnels et $n \in \mathbb{N}$ le plus petit possible.

$$A = -5\sqrt{18} + 6\sqrt{32} - \sqrt{50}$$

$$B = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$C = \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$E = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} - \frac{1}{2 + \sqrt{12}}$$

$$F = \frac{\sqrt{20} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{8}(\sqrt{10} - 5)}$$

$$G = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \sqrt{3}}}$$

$$H = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}}}}$$

$$I = \sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}$$

4. Soient $a, b, c, x \in \mathbb{R}$.

1. Développer :

a) $(a - b + c)^2$

b) $(a + b)^3$

c) $(a - b)^4$

d) $\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$

2. Factoriser au maximum :

a) $4x^2 - 12x + 9$

b) $1 + e^{2x} - 2e^x$

c) $x^4 - 1$

d) $(4x + 2)^2 - (x^2 - 2)^2$

5. Simplifier :

a) $\ln(e^x) + e^{-\ln(x)}$

b) $\ln(\sqrt{x}) - \ln(x^2)$

c) $e^{2\ln(x) + \ln(x+1)}$

II. Inégalités

6. Montrer que la valeur absolue du produit de deux réels est inférieure ou égale à la moyenne de leurs carrés. Dans quels cas a-t-on égalité ?

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si $|x - 2| \leq \frac{1}{4}$, alors $\left|1 - \frac{x}{2}\right| \leq \frac{1}{8}$ et $|x^2 - 4| \leq \frac{17}{16}$.

8. Donner les bornes supérieures et inférieures (si elles existent !) des ensembles suivants, et dire si ce sont des maxima ou minima ou rien du tout.

a) $[-1; 2[$ b) $\left\{1 + \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R}_+^*\right\}$ c) $\left\{5 - \frac{3}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$

III. Équations et inéquations

9. Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$(E_1) : x^2 + 2x > 0$	$(E_2) : x^2 - 2x + 1 > 0$	$(E_3) : x(x + 2) = 2x(3x - 4)$
$(E_4) : x^3 - x = x^2 + 2$	$(E_5) : x^2 - 6x + 9 \leq 0$	$(E_6) : x^2 < 2$
$(E_7) : x^3 - 2x - 1 = x - 3$	$(E_8) : x^6 + 7x^3 - 8 = 0$	$(E_9) : 1 - x^4 \geq 0$
$(E_{10}) : x^4 - 3x^2 - 4 = 0$	$(E_{11}) : \frac{-2}{x+3} = x$	$(E_{12}) : \frac{-2}{x+3} < x$
$(E_{13}) : \frac{x+1}{x-1} \leq \frac{x-3}{x+2}$	$(E_{14}) : \frac{2}{x} + \frac{4}{x+4} > 1$	$(E_{15}) : \frac{2x}{4x^2-1} \leq \frac{2x+1}{4x^2-4x+1}$

10. Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$(F_1) : \sqrt{x+7} = 5 - x$	$(F_2) : \sqrt{x^2+2x} < x+1$	$(F_3) : \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} \geq 5$
$(F_4) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x} + 1$	$(F_5) : \sqrt{x^2-1} \geq x$	$(F_6) : x+1 = \sqrt{x}$
$(F_7) : x-1 \leq 1-2x$	$(F_8) : x^2 + 3 x - 10 \leq 0$	$(F_9) : x^2 - 3x + 1 = x-2 $
$(F_{10}) : x - 7\sqrt{x} + 6 \geq 0$		

11. Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$(G_1) : \frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} = e$	$(G_2) : \ln(2x+1) - \ln(x-3) \leq 0$	$(G_3) : (e - e^{2x})(e^x - 1) > 0$
$(G_4) : \ln(x)^2 - 3\ln(x) - 4 \leq 0$	$(G_5) : e^{2x} + 3e^x - 1 = 0$	$(G_6) : \ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right) < \ln(2)$
$(G_7) : e^x + e^{x+1} > e^{2x} + e$	$(G_8) : \ln(x) + \ln(5-x) = -2$	$(G_9) : e^x - e^{-x} = 2$
$(G_{10}) : e^{\sin(x)} - \frac{9}{e^{\sin(x)}} \geq 0$		

12. À l'aide d'une étude de fonctions, résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

a) $\sin(x) \leq x$ b) $e^x - 1 \geq x$ c) $\sin(x) \geq \frac{\pi x}{2}$

13. Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$(E_1) : \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = -3$	$(E_2) : \lfloor e^x \rfloor = 2$	$(E_3) : 0 < \lfloor x^2 \rfloor \leq 4$	$(E_4) : \left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 2$
---	-----------------------------------	--	---

14. À l'aide d'études de fonctions :

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$.
2. a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x > x$.
 b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x \geq \frac{x^2}{2} + 1$.

15. 1. Résoudre, en fonction du paramètre $n \in \mathbb{Z}$, les (in)équations suivantes d'inconnue x réelle :

a) $2^n x + 3^n \leq 2^{n+1} x - 6^n$ b) $(-2)^n x + 2^n > 0$ c) $x^2 - 2^n x - 2^{2n+1} \geq 0$

2. Discuter suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ du nombre de solutions réelles de l'équation :

$$e^{2x} - 2(m+1)e^x + 1 = 0$$

16. Résoudre les équations et inéquations suivantes suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

a) $\frac{1}{x+m} \geq x - m$ b) $x^2 + m(1-x) = 2x - m$ c) $e^x + me^{-x} - m - 1 = 0$
