

TD Ch 1 – Manipuler des réels

Corrigé

I. Calculs

1. Il faut voir les factorisations ou les développements qui permettent de simplifier largement le calcul !

$$A = 72 \times 2 \times 10 = 1440$$

$$B = 94 \times 100 = 9400$$

$$C = -23 \times 3 \times 10 = -690$$

$$D = 22 \times 100 - 22 = 2178$$

$$E = 25 \times 100 - 50 = 2450$$

$$F = 90^2 - 1^2 = 8099$$

$$G = 9 \times 8 = 57$$

$$H = (22 - 2)(22 + 2) = 480$$

$$I = -(1600 - 36) = -1564$$

$$J = 90^2 - 2 \times 90 + 1 = 7921$$

$$K = 70^2 - 2^2 = 4896$$

$$L = (7, 9 - 2, 1)(7, 9 + 2, 1) = 58$$

2. Après simplification :

$$A = -\frac{13}{12}$$

$$B = \frac{17}{12}$$

$$C = -\frac{55}{68}$$

$$D = 1$$

$$E = -\frac{253}{35}$$

$$F = \frac{2}{3}$$

$$G = 70\sqrt{2}$$

$$H = ab^7$$

$$I = a^{-n}b^{3n}(a^n - b^n) \quad J = 0,62$$

$$K = \sqrt{2} - 1$$

$$L = \sqrt{3}$$

$$M = 4 \times 3^n$$

$$N = 1$$

$$O = \frac{1 - a^n}{2^n}$$

$$P = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$Q = a^{n(2n-1)}$$

3. Rappel : quand on a une racine carrée au dénominateur d'une fraction, on multiplie le numérateur et le dénominateur par sa **forme conjuguée** !

Par exemple :
$$C = \frac{(3 - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{3\sqrt{2} + 3 - 2 - \sqrt{2}}{2 - 1} = 2\sqrt{2} + 1$$

$$A = 4\sqrt{2}$$

$$B = 3\sqrt{2}$$

$$C = 2\sqrt{2} + 1$$

$$D = 2\sqrt{3}$$

$$E = \frac{9}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{3}$$

$$F = \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\sqrt{10}$$

$$G = 1 + \frac{1 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$H = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1 + \sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3}}} = 1 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$I = \sqrt{10} \text{ car } I^2 = 6 + 2\sqrt{3^2 - \sqrt{5}^2} = 10 \text{ et } I \geq 0.$$

4. Soient $a, b, c, x \in \mathbb{R}$. On a :

1. a) $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$ b) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

c) $(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$ d) $\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$

2. a) $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$

b) $1 + e^{2x} - 2e^x = (1 - e^x)^2 = (e^x - 1)^2$

c) $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

d) $(4x + 2)^2 - (x^2 - 2)^2 = -x(x + 4)(x - 2 - 2\sqrt{2})(x - 2 + 2\sqrt{2})$

5. Attention aux domaines d'existence ! Les expressions de l'énoncé n'ont un sens que sur $\mathbb{R}_+^*$. Sur ce domaine :

a) $\ln(e^x) + e^{-\ln(x)} = x + \frac{1}{x}$

b) $\ln(\sqrt{x}) - \ln(x^2) = -\frac{3}{2}\ln(x)$

c) $x^2(x + 1)$

II. Inégalités

6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On souhaite montrer que $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$, et trouver les réels a, b pour lesquels $|ab| = \frac{a^2 + b^2}{2}$.

On a : $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \iff 2|ab| \leq a^2 + b^2 \iff a^2 - 2|ab| + b^2 \geq 0$

Or on a toujours $a^2 - 2|ab| + b^2 = (|a| - |b|)^2 \geq 0$. L'inégalité est donc bien vraie.

De plus : $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \iff a^2 - 2|ab| + b^2 = 0 \iff (|a| - |b|)^2 = 0 \iff |a| - |b| = 0 \iff |a| = |b| \iff b = \pm a$.

Les couples pour lesquels on a égalité sont donc : $\mathcal{S} = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $|x - 2| \leq \frac{1}{4}$. On a alors :

$$\bullet \left| 1 - \frac{x}{2} \right| = \left| \frac{-(x - 2)}{2} \right| = \frac{|x - 2|}{2} \leq \frac{1/4}{2} = \frac{1}{8}.$$

On a bien la première inégalité : $\left| 1 - \frac{x}{2} \right| \leq \frac{1}{8}$.

$$\bullet \text{ On a } |x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)| = |x - 2||x + 2| \leq \frac{1}{4}|x + 2| \text{ puisque } |x + 2| \geq 0.$$

Or on sait que $|x - 2| \leq \frac{1}{4}$, ce qui équivaut à $x \in \left[2 - \frac{1}{4} ; 2 + \frac{1}{4} \right]$

Ainsi, $x + 2 \in \left[\frac{15}{4} ; \frac{17}{4} \right]$, et donc $|x + 2| \leq \frac{17}{4}$.

D'où finalement : $|x^2 - 4| \leq \frac{1}{4}|x + 2| \leq \frac{1}{4} \times \frac{17}{4}$.

On a bien la seconde inégalité : $|x^2 - 4| \leq \frac{17}{16}$

8. Il s'agit de se visualiser les ensembles pour pouvoir répondre à la question posée. En BCPST, aucune preuve ne sera demandée sur la notion de sup ou d'inf.

1. $\sup([-1, 2]) = 2$: pas de maximum. $\inf([-1, 2]) = \min([-1, 2]) = -1$.

2. En notant E l'ensemble de l'énoncé : $E = \left\{ 1 + \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R}_+^* \right\} =]1, +\infty[$.

On en déduit que cet ensemble n'a pas de borne supérieure (et donc pas de maximum), et que sa borne inférieure est 1, sans minimum.

3. Si on note E l'ensemble de l'énoncé, on obtient : $\sup(E) = 5$, sans maximum, et $\inf(E) = \min(E) = 2$ (pour $n = 1$).

III. Équations et inéquations

9. On a des (in)équations polynômiales ou rationnelles, qu'il s'agit de factoriser au maximum, à l'aide des racines. Je ne détaille pas la résolution de toutes les (in)équations dans ce corrigé (notamment les tableaux de signe), mais la rédaction est essentielle en DS !

$(E_1) : x^2 + 2x > 0 \iff x(x + 2) > 0$. Un tableau de signe simple permet de conclure que l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$

$(E_2) : x^2 - 2x + 1 > 0 \iff (x - 1)^2 > 0 \iff x - 1 \neq 0$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$(E_3) : x(x + 2) = 2x(3x - 4) \iff x(6x - 8 - x - 2) = 0 \iff x(5x - 10) = 0 \iff (x = 0 \text{ ou } x = 2)$.

$$\mathcal{S} = \{0; 2\}$$

(E₄) : $x^3 - x = x^2 + 2 \iff x^3 - x^2 - x - 2 = 0$. On remarque que 2 est racine évidente de ce polynôme.

On cherche donc $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$.

Or : $(x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$.

Par **identification**, on cherche donc $a, b, c \in \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -1 \\ c - 2b = -1 \\ -2c = -2 \end{cases}$$

On obtient immédiatement $a = c = 1$, puis $b = 1$. Ainsi, on a :

$$(E_4) \iff x^3 - x^2 - x - 2 = 0 \iff (x - 2)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Comme finalement le trinôme $x^2 + x + 1$ n'a aucune racine (son discriminant est $\Delta = -3 < 0$), on en déduit que $(E_4) \iff x - 2 = 0 \iff x = 2$.

D'où : $\mathcal{S} = \{2\}$

(E₅) : $x^2 - 6x + 9 \leq 0 \iff (x - 3)^2 \leq 0 \leq x - 3 = 0 \iff x = 3$, donc : $\mathcal{S} = \{3\}$.

(E₆) : $x^2 < 2 \iff x^2 - 2 < 0 \iff (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) < 0$, donc : $\mathcal{S} =]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$.

(E₇) : $x^3 - 2x - 1 = x - 3 \iff x^3 - 3x + 2 = 0$.

1 est racine évidente de ce trinôme, puisque $1 - 3 + 2 = 0$.

On cherche donc $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$.

Par **identification**, on obtient que $a = 1$, $b - a = 0$, $c - b = -3$ et $-c = 2$.

On en déduit que $a = 1$, $c = -2$ et $b = 1$.

Ainsi : $(E_7) \iff x^3 - 3x + 2 = 0 \iff (x - 1)(x^2 + x - 2) = 0$

Le trinôme obtenu a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$, donc il possède deux racines réelles, données

par $\frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$: il s'agit de 1 et -2.

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E₇) est : $\mathcal{S} = \{-2, 1\}$.

(E₈) : $x^6 + 7x^3 - 8 = 0 \iff (x^3)^2 + 7x^3 - 8 = 0 \iff x^3$ est solution de $y^2 + 7y - 8 = 0$.

Les racines de ce trinôme sont -8 et 1, donc :

$x^6 + 7x^3 - 8 = 0 \iff (x^3 = -8 \text{ ou } x^3 = 1) \iff (x = -2 \text{ ou } x = 1)$ puisque la racine cubique est unique.

On a donc obtenu comme ensemble de solutions : $\mathcal{S} = \{-2, 1\}$.

(E₉) : $1 - x^4 \geq 0 \iff (1 - x^2)(1 + x^2) \geq 0 \iff (1 - x)(1 + x)(1 + x^2) \geq 0$.

On remarque que $1 + x^2 \geq 0$ est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis un tableau de signe suffit à obtenir

$\mathcal{S} = [-1, 1]$.

(E₁₀) : $x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \iff x^2$ est solution de $y^2 - 3y - 4 = 0$

Ce trinôme a pour racines 4 et -1, donc on a :

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \iff (x^2 = 4 \text{ ou } x^2 = -1) \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2$ puisqu'un carré est toujours positif.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \{-2, 2\}$.

(E₁₁) : Le domaine d'existence est $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Sur ce domaine, on a :

$$\frac{-2}{x+3} = x \iff \frac{x(x+3)+2}{x+3} = 0 \iff \frac{x^2+3x+2}{x+3} = 0 \iff x^2+3x+2 = 0$$

Les racines de ce trinôme sont -1 et -2, donc $\mathcal{S} = \{-2, -1\}$.

(E₁₂) : On a le même domaine d'existence qu'à la question précédente, et par le même raisonnement :

$$\frac{-2}{x+3} < x \iff \frac{x^2+3x+2}{x+3} > 0 \iff \frac{(x+2)(x+1)}{x+3} > 0.$$

Un tableau de signe suffit à conclure que l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} =]-3, -2[\cup]-1, +\infty[}$.

(E₁₃) : Le domaine d'existence est $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. Sur ce domaine, après mise au même dénominateur, l'inéquation devient :

$$\frac{7x-1}{(x-1)(x+2)} \leq 0. \text{ Un tableau de signe donne : } \boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -2[\cup \left[\frac{1}{7}, 1\right[}$$

(E₁₄) : Domaine d'existence : $\mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}$. Sur ce domaine :

$$\frac{2}{x} + \frac{4}{x+4} > 1 \iff \frac{x^2-2x-8}{x(x+4)} < 0 \iff \frac{(x+2)(x-4)}{x(x+4)} < 0. \text{ Ainsi : } \boxed{\mathcal{S} =]-4, -2[\cup]0, 4[}$$

(E₁₅) : Remarquons d'abord que $4x^2 - 1 = (2x-1)(2x+1)$ et que $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$.

Ainsi, le domaine d'existence est $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\}$. Sur ce domaine :

$$\frac{2x}{4x^2-1} \leq \frac{2x+1}{4x^2-4x+1} \iff \frac{(2x+1)^2-2x(2x-1)}{(2x-1)^2(2x+1)} \geq 0 \iff \frac{6x+1}{(2x-1)^2(2x+1)} \geq 0$$

Un tableau de signe donne pour ensemble de solutions : $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[}$

10. Toutes ses (in)équations se résolvent par **disjonction de cas**. Pour les racines carrées, il s'agit de mettre au carré, selon le signe de l'autre membre. Pour les valeurs absolues, on fait selon le signe de l'intérieur. Attention à toujours commencer par le domaine d'existence !

(F₁) : Le domaine d'existence est $\mathcal{D} = [-7, +\infty[$. On procède par disjonction de cas.

- Cas 1 : $5-x < 0$, c'est-à-dire $x \in]5, +\infty[$. Dans ce cas, il n'y a aucune solution, car une racine carrée n'est jamais strictement négative !
- Cas 2 : $5-x \geq 0$, c'est-à-dire $x \in [-7, 5]$. Dans ce cas :
 $\sqrt{x+7} = 5-x \iff x+7 = (5-x)^2 \iff x^2-11x+18=0$.
 Les racines de ce trinôme sont 2 et 9 donc comme on est dans le sous-domaine $[-7, 5]$, la seule solution convenable est $x=2$.
- En conclusion, l'ensemble des solutions de l'équation est $\boxed{\mathcal{S} = \{2\}}$.

(F₂) : $x^2+2x \geq 0 \iff x(x+2) \geq 0$ donc le domaine d'existence est $\mathcal{D} =]-\infty, -2[\cup [0, +\infty[$.

- Cas 1 : $x+1 < 0$ - Pas de solution ($\mathcal{S}_1 = \emptyset$).
- Cas 2 : $x+1 \geq 0$, i.e $x \in [0, +\infty[$. Dans ce cas :
 $\sqrt{x^2+2x} < x+1 \iff x^2+2x < x^2+2x+1 \iff 0 < 1$: c'est toujours vrai. Ainsi, on a pour solutions dans ce cas : $\mathcal{S}_2 = [0, +\infty[$
- En conclusion, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = [0, +\infty[}$.

(F₃) : $\mathcal{D} = [1, +\infty[$. Les deux membres de l'inéquation sont positifs, donc on a :

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} \geq 5 \iff 2x-1 + 2\sqrt{(2x-1)(x-1)} + x-1 \geq 25 \iff 2\sqrt{2x^2-3x+1} \geq 27-3x$$

- Cas 1 : $27-3x < 0$, c'est-à-dire $x \in]9, +\infty[$. Dans ce cas, l'inéquation est toujours vraie (une racine carrée est toujours supérieure à un nombre négatif)
 Ainsi, on obtient pour premier ensemble de solutions : $\mathcal{S}_1 =]9, +\infty[$.
- Cas 2 : $27-3x \geq 0$, c'est-à-dire $x \in [1, 9]$. Dans ce cas :
 $2\sqrt{2x^2-3x+1} \geq 3(9-x) \iff 4(2x^2-3x+1) \geq 9(x^2-18x+81) \iff x^2-150x+725 \geq 0$.
 Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 140^2$, et pour racines 5 et 145. On obtient comme second ensemble de solutions : $\mathcal{S}_2 = [1, 9] \cap (]-\infty, 5] \cup [145, +\infty[) = [1, 5]$.
- D'où finalement l'ensemble des solutions de l'inéquation : $\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = [1, 5] \cup [9, +\infty[}$.

(F_4) : $\mathcal{D} = [0, 1[\cup]1, +\infty[$. Sur ce domaine, l'équation équivaut à $\sqrt{x} = x - 1$.

- Cas 1 : $x \in [0, 1[$. $\mathcal{S}_1 = \emptyset$.
- Cas 2 : $x \in]1, +\infty[$. Dans ce cas, l'équation devient $x = x^2 - 2x + 1$, i.e $x^2 - 3x + 1 = 0$. Les racines de ce trinôme sont $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.
Comme $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 0 < 1 < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, il reste $\mathcal{S}_2 = \{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\}$.
- Finalement : $\boxed{\mathcal{S} = \{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\}}$

(F_5) : $\mathcal{D} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

- Cas 1 : $x < 0$, i.e. ici $x \in]-\infty, -1]$. Dans ce cas, tous les x conviennent, donc $\mathcal{S}_1 =]-\infty, -1]$.
- Cas 2 : $x > 0$, i.e. ici $x \in [1, +\infty[$. On peut élever au carré, et obtenir $\sqrt{x^2 - 1} \geq x \iff -1 \geq 0$, ce qui n'est jamais vrai, donc $\mathcal{S}_2 = \emptyset$.
- Finalement : $\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 =]-\infty, -1]}$.

(F_6) : $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+$. Sur ce domaine, on a toujours $x + 1 \geq 0$, donc l'équation devient :

$$x + 1 = \sqrt{x} \iff x^2 + 2x + 1 = x \iff x^2 + x + 1 = 0. \text{ Ce trinôme n'a aucune racine réelle, donc } \boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$$

(F_7) : Cette équation est bien définie sur $\mathbb{R}$.

- Cas 1 : $x - 1 \geq 0$, i.e. $x \in [1, +\infty[$. Dans ce cas :
 $|x - 1| \leq 1 - 2x \iff x - 1 \leq 1 - 2x \iff 3x \leq 2 : \mathcal{S}_1 = [1, +\infty[\cap]-\infty, \frac{2}{3}] = \emptyset$
- Cas 2 : $x - 1 < 0$, i.e. $x \in]-\infty, 1[$. Dans ce cas :
 $|x - 1| \leq 1 - 2x \iff 1 - x \leq 1 - 2x \iff x \leq 0$. D'où $\mathcal{S}_2 = x \in]-\infty, 1[\cap \mathbb{R}_- = \mathbb{R}_-$.
- Finalement : $\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \mathbb{R}_-}$

(F_8) :

- Cas 1 : $x \geq 0$. $x^2 + 3x - 10 \leq 0 \iff (x + 5)(x - 2) \leq 0 \iff x \in [-5, 2]$, donc on a $\mathcal{S}_1 = [0, +\infty[\cap [-5, 2] = [0, 2]$.
- Cas 2 : $x < 0$. $x^2 - 3x - 10 \leq 0 \iff (x - 5)(x + 2) \leq 0 \iff x \in [-2, 5]$, donc on a $\mathcal{S}_2 =]-\infty, 0[\cap [-2, 5] = [-2, 0[$.
- Finalement : $\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = [-2, 2]}$.