TD Ch 1 – Manipuler des réels
Corrigé

I. Calculs

1. Il faut voir les factorisations ou les développements qui permettent de simplifier largement le calcul !

A $= 72 \times 2 \times 10 = 1440$ B $= 94 \times 100 = 9400$ C $= -23 \times 3 \times 10 = -690$

D $= 22 \times 100 - 22 = 2178$ E $= 25 \times 100 - 50 = 2450$ F $= 90^2 - 1^2 = 8099$

G $= 9 \times 8 = 57$ H $= (22-2)(22+2) = 480$ I $= -(1600-36) = -1564$

J $= 90^2 - 2 \times 90 + 1 = 7921$ K $= 70^2 - 2^2 = 4896$ L $= (7,9-2,1)(7,9+2,1) = 58$

---

2. Après simplification :

A $= -\dfrac{13}{12}$ B $= \dfrac{17}{12}$ C $= -\dfrac{55}{68}$ D $= 1$ E $= -\dfrac{253}{35}$

F $= \dfrac{2}{3}$ G $= 70\sqrt{2}$ H $= ab^7$ I $= a^{-n}b^{3n}\,(a^n - b^n)$ J $0,62$

K $= \sqrt{2}-1$ L $= \sqrt{3}$ M $= 4 \times 3^n$ N $= 1$ O $= \dfrac{1-a^n}{2^n}$

P $= \dfrac{1}{2^{n+1}}$ Q $= a^{n(2n-1)}$

---

3. Rappel : quand on a une racine carrée au dénominateur d'une fraction, on multiplie le numérateur et le dénominateur par sa **forme conjuguée** !

Par exemple : $C = \dfrac{(3-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{3\sqrt{2}+3-2-\sqrt{2}}{2-1} = 2\sqrt{2}+1$

A $= 4\sqrt{2}$ B $= 3\sqrt{2}$ C $= 2\sqrt{2}+1$ D $= 2\sqrt{3}$ E $= \dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$

F $= \dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}\sqrt{10}$ G $= 1+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ H $= 1+\dfrac{1}{1+\frac{1+\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}} = 1+\dfrac{2}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

I $= \sqrt{10}$ car $I^2 = 6+2\sqrt{3^2-\sqrt{5}^2} = 10$ et $I \geq 0$.

---

4. Soient $a, b, c, x \in \mathbb{R}$. On a :

1. a) $(a-b+c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$ b) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

   c) $(a-b)^4 = a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$ d) $\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$

2. a) $4x^2-12x+9 = (2x-3)^2$ b) $1+e^{2x}-2e^x = (1-e^x)^2 = (e^x-1)^2$

   c) $x^4-1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ d) $(4x+2)^2-(x^2-2)^2 = -x(x+4)(x-2-2\sqrt{2})(x-2+2\sqrt{2})$

---

5. Attention aux domaines d'existence ! Les expressions de l'énoncé n'ont un sens que sur $\mathbb{R}_+^*$. Sur ce domaine :

a) $\ln(e^x)+e^{-\ln(x)} = x+\dfrac{1}{x}$ b) $\ln(\sqrt{x})-\ln(x^2) = -\dfrac{3}{2}\ln(x)$ c) $x^2(x+1)$

II. Inégalités

6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On souhaite montrer que $|ab| \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$, et trouver les réels a, b pour lesquels $|ab| = \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

On a : $|ab| \leq \dfrac{a^2+b^2}{2} \iff 2|ab| \leq a^2+b^2 \iff a^2 - 2|ab| + b^2 \geq 0$

Or on a toujours $a^2 - 2|ab| + b^2 = \boxed{(|a|-|b|)^2 \geq 0}$. L'inégalité est donc bien $\boxed{\text{vraie}}$.

De plus : $|ab| \leq \dfrac{a^2+b^2}{2} \iff a^2-2|ab|+b^2 = 0 \iff (|a|-|b|)^2 = 0 \iff |a|-|b| = 0 \iff |a| = |b| \iff b = \pm a$.

Les couples pour lesquels on a égalité sont donc : $\boxed{\mathcal{S} = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{R}\} \bigcup \{(a,-a) \mid a \in \mathbb{R}\}}$.

---

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $|x-2| \leq \dfrac{1}{4}$. On a alors :

- $\left|1 - \dfrac{x}{2}\right| = \left|\dfrac{-(x-2)}{2}\right| = \dfrac{|x-2|}{2} \leq \dfrac{1/4}{2} = \dfrac{1}{8}$.
  On a bien la première inégalité : $\left|1 - \dfrac{x}{2}\right| \leq \dfrac{1}{8}$.
- On a $|x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2||x+2| \leq \dfrac{1}{4}|x+2|$ puisque $|x+2| \geq 0$.
  Or on sait que $|x-2| \leq \dfrac{1}{4}$, ce qui équivaut à $x \in \left[2 - \frac{1}{4} \ ; \ 2 + \frac{1}{4}\right]$
  Ainsi, $x+2 \in \left[\dfrac{15}{4}; \dfrac{17}{4}\right]$, et donc $|x+2| \leq \dfrac{17}{4}$.
  D'où finalement : $|x^2-4| \leq \dfrac{1}{4}|x+2| \leq \dfrac{1}{4} \times \dfrac{17}{4}$.
  On a bien la seconde inégalité : $|x^2-4| \leq \dfrac{17}{16}$

---

8. Il s'agit de se visualiser les ensembles pour pouvoir répondre à la question posée. En BCPST, aucune preuve ne sera demandée sur la notion de sup ou d'inf.

1. $\sup([-1,2[) = 2$: pas de maximum. $\inf([-1,2[) = \min([-1,2[) = -1$.
2. En notant E l'ensemble de l'énoncé : $E = \left\{1 + \dfrac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R}_+^*\right\} =]1, +\infty[$.
   On en déduit que cet ensemble n'a pas de borne supérieure (et donc pas de maximum), et que sa borne inférieure est 1, sans minimum.
3. Si on note E l'ensemble de l'énoncé, on obtient : $\sup(E) = 5$, sans maximum, et $\inf(E) = \min(E) = 2$ (pour $n = 1$).

III. Équations et inéquations

9. On a des (in)équations polynômiales ou rationnelles, qu'il s'agit de factoriser au maximum, à l'aide des racines. Je ne détaille pas la résolution de toutes les (in)équations dans ce corrigé (notamment les tableaux de signe), mais la rédaction est essentielle en DS !

(E_1) : $x^2 + 2x > 0 \iff x(x+2) > 0$. Un tableau de signe simple permet de conclure que l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty, -2[\cup]0 + +\infty[$

(E_2) : $x^2 - 2x + 1 > 0 \iff (x-1)^2 > 0 \iff x - 1 \neq 0$. L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R} \backslash \{1\}}$.

(E_3) : $x(x+2) = 2x(3x-4) \iff x(6x - 8 - x - 2) = 0 \iff x(5x-10) = 0 \iff (x = 0 \text{ ou } x = 2)$.
$\boxed{\mathcal{S} = \{0; 2\}}$

(E_4) : $x^3 - x = x^2 + 2 \iff x^3 - x^2 - x - 2 = 0$. On remarque que 2 est racine évidente de ce polynôme.
On cherche donc $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2)(ax^2 + bx + c)$.
Or : $(x-2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$.

Par **identification**, on cherche donc $a, b, c \in \mathbb{R}$ qui vérifient : $\begin{cases} a &= 1 \\ b - 2a &= -1 \\ c - 2b &= -1 \\ -2c &= -2 \end{cases}$

On obtient immédiatement $a = c = 1$, puis $b = 1$. Ainsi, on a :
$\boxed{(E_4) \iff x^3 - x^2 - x - 2 = 0 \iff (x-2)(x^2 + x + 1) = 0}$.
Comme finalement le trinôme $x^2 + x + 1$ n'a aucune racine (son discriminant est $\Delta = -3 < 0$), on en déduit que $(E_4) \iff x - 2 = 0 \iff x = 2$.
D'où : $\boxed{\mathcal{S} = \{2\}}$

(E_5) : $x^2 - 6x + 9 \leq 0 \iff (x-3)^2 \leq 0 \leq x - 3 = 0 \iff x = 3$, donc : $\boxed{\mathcal{S} = \{3\}}$.

(E_6) : $x^2 < 2 \iff x^2 - 2 < 0 \iff (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) < 0$, donc : $\boxed{\mathcal{S} =]-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}[}$.

(E_7) : $x^3 - 2x - 1 = x - 3 \iff x^3 - 3x + 2 = 0$.
1 est racine évidente de ce trinôme, puisque $1 - 3 + 2 = 0$.
On cherche donc $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - 3x + 2 = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$.
Par **identification**, on obtient que $a = 1$, $b - a = 0$, $c - b = -3$ et $-c = 2$.
On en déduit que $a = 1$, $c = -2$ et $b = 1$.
Ainsi : $(E_7) \iff x^3 - 3x + 2 = 0 \iff (x-1)(x^2 + x - 2) = 0$
Le trinôme obtenu a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$, donc il possède deux racines réelles, données par $\dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$: il s'agit de 1 et -2.
Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_7) est : $\boxed{\mathcal{S} = \{-2, 1\}}$.

(E_8) : $x^6 + 7x^3 - 8 = 0 \iff \left(x^3\right)^2 + 7x^3 - 8 = 0 \iff x^3$ est solution de $y^2 + 7y - 8 = 0$.
Les racines de ce trinôme sont -8 et 1, donc :
$x^6 + 7x^3 - 8 = 0 \iff (x^3 = -8 \text{ ou } x^3 = 1) \iff (x = -2 \text{ ou } x = 1)$ puisque la racine cubique est unique.
On a donc obtenu comme ensemble de solutions : $\boxed{\mathcal{S} = \{-2, 1\}}$.

(E_9) : $1 - x^4 \geq 0 \iff (1 - x^2)(1 + x^2) \geq 0 \iff (1-x)(1+x)(1+x^2) \geq 0$.
On remarque que $1 + x^2 \geq 0$ est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis un tableau de signe suffit à obtenir $\boxed{\mathcal{S} = [-1, 1]}$.

(E_{10}) :$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \iff x^2$ est solution de $y^2 - 3y - 4 = 0$
Ce trinôme a pour racines 4 et -1, donc on a :
$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \iff (x^2 = 4 \text{ ou } x^2 = -1) \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2$ puisqu'un carré est toujours positif.
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\boxed{\mathcal{S} = \{-2, 2\}}$.

(E_{11}) :Le domaine d'existence est $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$. Sur ce domaine, on a :
$\dfrac{-2}{x+3} = x \iff \dfrac{x(x+3)+2}{x+3} = 0 \iff \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x+3} = 0 \iff x^2 + 3x + 2 = 0$
Les racines de ce trinôme sont -1 et -2, donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-2, -1\}}$.

(E_{12}) : On a le même domaine d'existence qu'à la question précédente, et par le même raisonnement :
$\frac{-2}{x+3} < x \iff \frac{x^2+3x+2}{x+3} > 0 \iff \frac{(x+2)(x+1)}{x+3} > 0.$
Un tableau de signe suffit à conclure que l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} =]-3,-2[\cup]-1,+\infty[}$.

(E_{13}) : Le domaine d'existence est $\mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$. Sur ce domaine, après mise au même dénominateur, l'inéquation devient :
$\frac{7x-1}{(x-1)(x+2)} \leq 0$. Un tableau de signe donne : $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty,-2[\cup \left[\frac{1}{7},1\right[}$

(E_{14}) : Domaine d'existence : $\mathbb{R}\backslash\{-4,0\}$. Sur ce domaine :
$\frac{2}{x} + \frac{4}{x+4} > 1 \iff \frac{x^2-2x-8}{x(x+4)} < 0 \iff \frac{(x+2)(x-4)}{x(x+4)} < 0$. Ainsi : $\boxed{\mathcal{S} =]-4,-2[\cup]0,4[}$.

(E_{15}) : Remarquons d'abord que $4x^2-1 = (2x-1)(2x+1)$ et que $4x^2-4x+1 = (2x-1)^2$.
Ainsi, le domaine d'existence est $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\}$. Sur ce domaine :
$\frac{2x}{4x^2-1} \leq \frac{2x+1}{4x^2-4x+1} \iff \frac{(2x+1)^2-2x(2x-1)}{(2x-1)^2(2x+1)} \geq 0 \iff \frac{6x+1}{(2x-1)^2(2x+1)} \geq 0$
Un tableau de signe donne pour ensemble de solutions : $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup \left[-\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2},+\infty\right[}$

---

10. Toutes ses (in)équations se résolvent par **disjonction de cas**. Pour les racines carrées, il s'agit de mettre au carré, selon le signe de l'*autre* membre. Pour les valeurs absolues, on fait selon le signe de l'intérieur. Attention à toujours commencer par le domaine d'existence !

(F_1) : Le domaine d'existence est $\mathcal{D} = [-7,+\infty[$. On procède par disjonction de cas.

- Cas 1 : $5-x<0$, c'est-à-dire $x \in]5,+\infty[$. Dans ce cas, il n'y a aucune solution, car une racine carrée n'est jamais strictement négative !
- Cas 2 : $5-x \geq 0$, c'est-à-dire $x \in [-7,5]$. Dans ce cas :
$\sqrt{x+7} = 5-x \iff x+7 = (5-x)^2 \iff x^2-11x+18 = 0$.
Les racines de ce trinôme sont 2 et 9 donc comme on est dans le sous-domaine $[-7,5]$, la seule solution convenable est $x=2$.
- En conclusion, l'ensemble des solutions de l'équation est $\boxed{\mathcal{S} = \{2\}}$.

(F_2) : $x^2+2x \geq 0 \iff x(x+2) \geq 0$ donc le domaine d'existence est $\mathcal{D} =]-\infty,-2] \cup [0,+\infty[$.

- Cas 1 : $x+1<0$ - Pas de solution ($\mathcal{S}_1 = \varnothing$).
- Cas 2 : $x+1 \geq 0$, i.e $x \in [0,+\infty[$. Dans ce cas :
$\sqrt{x^2+2x} < x+1 \iff x^2+2x < x^2+2x+1 \iff 0<1$: c'est toujours vrai. Ainsi, on a pour solutions dans ce cas : $\mathcal{S}_2 = [0,+\infty[$
- En conclusion, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = [0,+\infty[}$.

(F_3) : $\mathcal{D} = [1,+\infty[$. Les deux membres de l'inéquation sont positifs, donc on a :
$\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1} \geq 5 \iff 2x-1+2\sqrt{(2x-1)(x-1)}+x-1 \geq 25 \iff 2\sqrt{2x^2-3x+1} \geq 27-3x$

- Cas 1 : $27-3x<0$, c'est-à-dire $x \in]9,+\infty[$. Dans ce cas, l'inéquation est toujours vraie (une racine carrée est toujours supérieure à un nombre négatif !)
Ainsi, on obtient pour premier ensemble de solutions : $\mathcal{S}_1 =]9,+\infty[$.
- Cas 2 : $27-3x \geq 0$, c'est-à-dire $x \in [1,9]$. Dans ce cas :
$2\sqrt{2x^2-3x+1} \geq 3(9-x) \iff 4(2x^2-3x+1) \geq 9(x^2-18x+81) \iff x^2-150x+725 \geq 0$.
Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 140^2$, et pour racines 5 et 145. On obtient comme second ensemble de solutions : $\mathcal{S}_2 = [1,9] \cap (]-\infty,5] \cup [145,+\infty[) = [1,5]$.
- D'où finalement l'ensemble des solutions de l'inéquation : $\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = [1,5] \cup [9,+\infty].}$

(F_4) : $\mathcal{D} = [0,1[\cup]1,+\infty[$. Sur ce domaine, l'équation équivaut à $\sqrt{x} = x-1$.

- Cas 1 : $x \in [0,1[$. $\mathcal{S}_1 = \varnothing$.
- Cas 2 : $x \in]1,+\infty[$. Dans ce cas, l'équation devient $x = x^2 - 2x + 1$, i.e $x^2 - 3x + 1 = 0$. Les racines de ce trinôme sont $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.
  Comme $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < 0 < 1 < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, il reste $\mathcal{S}_2 = \{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\}$.
- Finalement : $\boxed{\mathcal{S} = \{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\}}$

(F_5) : $\mathcal{D} =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.

- Cas 1 : $x < 0$, i.e. ici $x \in]-\infty,-1]$. Dans ce cas, tous les x conviennent, donc $\mathcal{S}_1 =]-\infty,-1]$.
- Cas 2 : $x > 0$, i.e. ici $x \in [1,+\infty[$. On peut élever au carré, et obtenir $\sqrt{x^2-1} \geq x \iff -1 \geq 0$, ce qui n'est jamais vrai, donc $\mathcal{S}_2 = \varnothing$.
- Finalement : $\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 =]-\infty,-1]}$.

(F_6) : $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+$. Sur ce domaine, on a toujours $x+1 \geq 0$, donc l'équation devient :
$x+1 = \sqrt{x} \iff x^2+2x+1 = x \iff x^2+x+1 = 0$. Ce trinôme n'a aucune racine réelle, donc $\boxed{\mathcal{S} = \varnothing}$

(F_7) : Cette équation est bien définie sur $\mathbb{R}$.

- Cas 1 : $x - 1 \geq 0$, i.e. $x \in [1,+\infty[$. Dans ce cas :
  $|x-1| \leq 1-2x \iff x-1 \leq 1-2x \iff 3x \leq 2$: $\S_1 = [1,+\infty[\cap \left]-\infty, \frac{2}{3}\right] = \varnothing$
- Cas 2 : $x - 1 < 0$, i.e. $x \in]-\infty,1[$. Dans ce cas :
  $|x-1| \leq 1-2x \iff 1-x \leq 1-2x \iff x \leq 0$. D'où $S_2 = x \in]-\infty,1[\cap \mathbb{R}_- = \mathbb{R}_-$.
- Finalement : $\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \mathbb{R}_-}$

(F_8) :

- Cas 1 : $x \geq 0$. $x^2 + 3x - 10 \leq 0 \iff (x+5)(x-2) \leq 0 \iff x \in [-5,2]$, donc on a $\mathcal{S}_1 = [0,+\infty[\cap [-5,2] = [0,2]$.
- Cas 2 : $x < 0$. $x^2 - 3x - 10 \leq 0 \iff (x-5)(x+2) \leq 0 \iff x \in [-2,5]$, donc on a $\mathcal{S}_2 =]-\infty,0[\cap [-2,5] = [-2,0[$.
- Finalement : $\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = [-2,2]}$.

(F_9) : Commençons par remarquer que $x^2-3x+1=0 \iff x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

- Cas 1 : $x \leq \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Alors $x^2-3x+1 \geq 0$ et $x-2 \leq 0$. On obtient comme équation $x^2-2x-1=0$: $\mathcal{S}_1 = \left]-\infty, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cap \{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\} = \{1-\sqrt{2}\}$
- Cas 2 : $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < x \leq 2$. Alors $x^2-3x+1 \leq 0$ et $x-2 \leq 0$. On obtient comme équation $x^2-4x+3=0 \iff (x-1)(x-3)=0$.
  D'où $\mathcal{S}_2 = \{1\}$.
- Cas 3 : $2 < x \leq \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Alors $x^2-3x+1 \leq 0$ et $x-2 \geq 0$. On obtient de nouveau $x^2-2x-1=0$, et donc $\mathcal{S}_4 = \{1+\sqrt{2}\}$
- Cas 4 : $x > \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. On obtient $\mathcal{S}_4 = \{3\}$.
- Finalement : $\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4 = \{1, 3, 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}}$

2è méthode plus simple : $|x^2-3x+1| = |x-2| \iff x^2-3x+1 = \pm(x-2) \iff \left(x^2-3x+1 = x-2 \text{ ou } x^2-3x+1=-(x-2)\right)$: reste à résoudre ces deux équations de degré 2 et à réunir les solutions !

(F_{10}) : Domaine d'existence : $\mathbb{R}_+$. Sur ce domaine :
$x-7\sqrt{x}+6 \geq 0 \iff (\sqrt{x} \text{ est solution de } y^2-7y+6 =\geq 0) \iff \sqrt{x} \in]-\infty, 1] \cup [6, +\infty[$
Comme une racine carrée est toujours positive, on obtient $\sqrt{x} \in [0,1] \cup [6, +\infty]$, et donc l'ensemble des solutions est : $\boxed{\mathcal{S} = [0,1] \cup [36, +\infty[}$.

---

11. Le plus important est de donner le domaine d'existence, et de savoir s'il s'agit d'utiliser la monotonie ou un changement de variable.

(G_1) : $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} = e \iff e^{x+4} = e^1 \iff x+4=1$ par stricte monotonie de la fonction exponentielle.
Ainsi, on obtient comme ensemble de solutions : $\boxed{\mathcal{S} = \{3\}}$

(G_2) : Le domaine d'existence est $\mathcal{D} =]3, +\infty[$. Sur ce domaine :
$\ln(2x+1) - \ln(x-3) \leq 0 \iff \ln(2x+1) \leq \ln(x-3) \iff 2x+1 \leq x-3$ par stricte croissance du logarithme népérien.
On obtient comme ensemble de solutions : $\boxed{\mathcal{S} =]3, +\infty[\cap]-\infty, -4[= \varnothing}$

(G_3) : $e - e^{2x} \geq 0 \iff e \geq e^{2x} \iff 1 \geq 2x \iff x \leq \dfrac{1}{2}$, par stricte croissance de l'exponentielle.
De même, $e^x - 1 > 0 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$.
Ainsi, un tableau de signe permet de conclure que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\boxed{\mathcal{S} = \left]0, \tfrac{1}{2}\right[}$.

(G_4) : Le domaine d'existence est $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons $y = \ln(x) \in \mathbb{R}$. On a alors :
$\ln(x)^2 - 3\ln(x) - 4 \leq 0 \iff y^2-3y-4 \leq 0 \iff (y+1)(y-4) \leq 0 \iff y \in [-1, 4]$.
On a, par stricte croissance, $\ln(x) \in [-1,4] \iff x \in [e^{-1}, e^4]$. Ainsi : $\boxed{\mathcal{S} = [e^{-1}, e^4]}$.

(G_5) : Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $y = e^x \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors :

$e^{2x} + 3e^x - 1 = 0 \iff y^2+3y-1=0 \iff y = \dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2} \iff e^x = \dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$.

Or $-3-\sqrt{13} < 0 < -3+\sqrt{13}$, donc l'unique solution de l'équation est $x = \ln\left(\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)$.

Finalement : $\boxed{\mathcal{S} = \{\ln\left(\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}\right)\}}$

(G_6) : Le domaine d'existence est $\mathcal{D} =]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$. Sur ce domaine, on a :
$\ln\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right) < \ln(2) \iff \dfrac{x-1}{x+3} < 2 \iff \dfrac{x+7}{x+3} > 0.$
Ainsi : $\boxed{\mathcal{S} = (]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[) \cap (]-\infty, -7[\cup]-3, +\infty[) =]-\infty, -7[\cup]1, +\infty[}$

(G_7) : $e^x + e^{x+1} > e^{2x} + e \iff e^x(1+x) > (e^x)^2 + e$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $y = e^x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :
$e^x + e^{x+1} > e^{2x} + e \iff y^2 - (1+e)y + e < 0 \iff (y-1)(y-e) < 0$.
On obtient $y \in]1, e[$, c'est-à-dire $e^x \in]1, e[$, qui équivaut par stricte croissance de l'exponentielle à $x \in]0, 1[$.
D'où $\boxed{\mathcal{S} =]0, 1[}$

(G_8) : Domaine d'existence : $]0, 5[$. Sur ce domaine, on a :
$\ln(x) + \ln(5-x) = -2 \iff \ln(x(5-x)) = -2 \iff x(5-x) = e^{-2}$ par stricte croissance de ln.
Ainsi, on obtient l'équation de degré 2 : $x^2 - 5x + e^{-2} = 0$.
Le discriminant du trinôme est $\Delta = 25 - 4e^{-2} > 0$, et on a donc deux racines réelles, données par $\boxed{\dfrac{5 \pm \sqrt{\Delta}}{2}}$

(G_9) : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $y = e^x \in \mathbb{R}_+^*$. L'équation devient :
$e^x - e^{-x} = 2 \iff y - \dfrac{1}{y} = 2 \iff \dfrac{y^2 - 2y - 1}{y} = 0 \iff y = 1 \pm \sqrt{2} \iff e^x = 1 \pm \sqrt{2}$.
Comme $1 - \sqrt{2} < 0 < 1 + \sqrt{2}$, on trouve une unique solution, donnée par $x = \ln(1 + \sqrt{2})$.
Ainsi : $\boxed{\mathcal{S} = \{\ln(1+\sqrt{2})\}}$.

(G_{10}) :Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $y = e^{\sin(x)}$. On peut déjà remarquer que comme $\sin(x) \in [-1, 1]$, on a toujours $e^{\sin(x)} \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$. L'inéquation devient :
$e^{\sin(x)} - \dfrac{9}{e^{\sin(x)}} \geq 0 \iff y - \dfrac{9}{y} \geq 0 \iff \dfrac{y^2 - 9}{y} \geq 0 \iff \dfrac{(y-3)(y+3)}{y} \geq 0.$
Un tableau de signe donne que l'inéquation est équivalente à : $y \in [-3, 0[\cup [3, +\infty[$.
Or, on a toujours $0 < y \leq e < 3$, donc c'est impossible ! Finalement : $\boxed{\mathcal{S} = \varnothing}$.

---

12. Il s'agit simplement de réaliser le tableau de variations des fonctions suivantes :
$f : x \mapsto x - \sin(x)$, $g : x \mapsto e^x - x - 1$ et $h : x \mapsto \sin(x) - \dfrac{\pi}{2}$, qui sont toutes définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0, donc elle est positive pour $x \in \mathbb{R}_+$: $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}_+}$.
2. $e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq e^0 \iff x \geq 0$, donc la fonction g admet un minimum en 0, qui vaut 0. Ainsi, elle est toujours positive : $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}}$
3. La fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0, donc elle est positive sur $\mathbb{R}_-$: $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}_-}$

---

13. On utilise dans chacune de ces équations l'équivalence : $\lfloor x \rfloor = k \iff k \leq x < k+1$.

(E_1) : $\left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = -3 \iff -3 \leq x + \dfrac{1}{2} < -2 \iff -\dfrac{7}{2} \leq x < -\dfrac{5}{2}$.
Ainsi, on a pour ensemble de solutions : $\boxed{\mathcal{S} = \left[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right[}$.

(E_2) : $\lfloor e^x \rfloor = 2 \iff 2 \leq e^x < 3 \iff \ln(2) \leq x < \ln(3)$ par stricte croissance de l'exponentielle.
Ainsi, on obtient comme ensemble de solutions : $\boxed{\mathcal{S} = [\ln(2), \ln(3)[}$

(E_3) : $0 < \lfloor x^2 \rfloor \leq 4 \iff \lfloor x^2 \rfloor = 1, 2, 3 \text{ ou } 4 \iff 1 \leq x^2 < 5$
On a $1 \leq x^2 \iff x^2 - 1 \geq 0 \iff x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. D'autre part : $x^2 < 5 \iff (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) < 0 \iff x \in]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$.
D'où : $\boxed{\mathcal{S} =]-\sqrt{5}, -1] \cup [1, \sqrt{5}[}$.

(E_4) : L'équation est bien définie sur $\mathbb{R}$ puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 \geq 0$. On a :
$\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 2 \iff 2 \leq \sqrt{x^2+1} < 3 \iff 4 \leq x^2+1 < 9 \iff 3 \leq x^2 < 8$.
De la même manière qu'à la question précédente, on obtient : $\boxed{\mathcal{S} =]-2\sqrt{2}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2\sqrt{2}[}$.

---

14. 1. Définissons f et g deux fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, par $f(x) = \ln(x+1) - x + \dfrac{x^2}{2}$ et $g(x) = \ln(x+1) - x$.
f et g sont bien définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+$, comme somme de fonctions qui le sont. De plus, on a :

- $\forall x \geq 0, f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 + x = \dfrac{1+(x-1)(x+1)}{x+1} = \dfrac{x^2}{x+1} > 0$.
- $\forall x \geq 0, g'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 = -\dfrac{x}{x+1} < 0$.

Ainsi, f est croissante et g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Enfin, $f(0) = g(0) = 0$, donc on a bien : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$, c'est-à-dire : $\forall x \geq 0, x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$.

2. (a) On étudie la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x - x$.
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme, et : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - 1$.
On a $f'(x) \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq 0$ par stricte croissance de l'exponentielle.
Ainsi, f admet un minimum en $x = 0$, valant $e^0 - 0 = 1$. Ainsi, f est à valeurs strictement positives, et donc l'inéquation est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}}$.

(b) On étudie la fonction $g : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x - \dfrac{x^2}{2} - 1$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme, et : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x = x = f(x) > 0$.
Ainsi, d'après la question précédente, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Comme $g(0) = 1 + 0 - 1 = 0$, on a que g est positive sur les positifs et négatifs sur les négatifs.
D'où l'ensemble de solutions : $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}_+}$.

---

15. 1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$2^n x + 3^n \leq 2^{n+1}x - 6^n \iff 2^n x \geq 3^n + 6^n \iff x \geq \dfrac{3^n+6^n}{2^n} = 3^n(1+2^{-n})$ puisque $2^n > 0$ (quelque soit n).
Ainsi, l'ensemble des solutions (qui dépend de $n \in \mathbb{N}$) est le suivant : $\boxed{\mathcal{S}_n = [3^n(1+2^{-n})\ ;\ +\infty[}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si n est pair, l'inéquation se réécrit $2^n x + 2^n > 0 \iff x + 1 > 0$ puisque $2^n > 0$.
On a alors $\mathcal{S}_{\text{pair}} =]-1, +\infty[$.
- Si n est impair, l'inéquation se réécrit $-2^n x + 2^n > 0 \iff 1 - x > 0$ puisque $2^n > 0$.
On a alors

$\mathcal{S}_{\text{impair}} =]-\infty, 1[$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Le discriminant du trinôme est $\Delta_n = 2^{2n} + 2^{2n+3} = 2^{2n} \times 1 + 8 = 9 \times 2^{2n} = (3 \times 2^n)^2 > 0$.
Ainsi, ce trinôme a deux racines réelles, données par $\dfrac{2^n \pm 3 \times 2^n}{2}$, c'est-à-dire 2^{n+1} et -2^n.
Le trinôme a pour coefficient dominant 1, donc il est positif à l'extérieur de ses racines. Comme $-2^n < 0 < 2^{n+1}$, on obtient comme ensemble de solutions : $\boxed{\mathcal{S}_n =]-\infty, -2^n] \cup [2^{n+1}, +\infty[}$.

2. Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour résoudre l'équation, on procède par changement de variable : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $y = e^x \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors :
$e^{2x} - 2(m+1)e^x + 1 = 0 \iff y^2 - 2(m+1)y + 1 = 0$.
Ce trinôme a pour discriminant $\Delta_m = 4(m+1)^2 - 4 = 4(m^2+2m) = 4m(m+2)$. Le nombre de racines dépend du signe du discriminant, donc on doit faire une disjonction de cas.

- Cas 1 : $m \in]-2, 0[$. Alors le trinôme n'admet aucune racine réelle ($\Delta_m < 0$), donc $\mathcal{S}_m = \varnothing$ dans ce cas.

- Cas 2 : $m = -2$ ou $m = 0$. Dans ce cas, le trinôme admet une racine réelle double ($\Delta_m = 0$), donnée par $y = m + 1$.
  Cette racine correspond bien à une solution si et seulement si $m + 1 > 0$, donc seulement pour $m = 0$.
- Cas 3 : $m < -2$ ou $m > 0$. Dans ce cas, le trinôme admet deux racines réelles, données par $m + 1 \pm \sqrt{m(m+2)}$.
  Ces racines correspondent à des solutions de l'équation seulement si elles sont strictement positives.

  – On a $m+1-\sqrt{m(m+2)} > 0 \iff m+1 > \sqrt{m(m+2)} \iff (m+1 > 0 \text{ et } m^2+2m+1 > m^2+2m) \iff m > -1$.
  – On a $m + 1 + \sqrt{m(m+2)} > 0 \iff -(m+1) < \sqrt{m(m+2)} \iff (-(m+1) < 0 \text{ ou } m^2+2m+1 < m^2+2m) \iff m > -1$.

  Ainsi, si $m < -2$, alors $\mathcal{S}_m = \varnothing$, et si $m > 0$, alors il y a deux solutions.
- En conclusion, le nombre de solutions de l'équation vaut : $\boxed{0 \text{ si } m < 0, 1 \text{ si } m = 0, \text{ et } 2 \text{ si } m > 0}$.

16.

a) $\dfrac{1}{x+m} \geq x - m \iff \dfrac{x^2-(m^2+1)}{x+m} \leq 0 \iff \dfrac{(x-r)(x+r)}{x+m} \leq 0$ où $r = \sqrt{m^2+1}$, puisque $m^2 + 1 \geq 0$.
Pour conclure, il faut dresser le tableau de signe de cette expression, et donc connaître la position relative de $-r$, r et $-m$.
On sait que $r = \sqrt{m^2+1} > \sqrt{m^2} = |m|$, et donc $-r < -|m| \leq -m \leq |m| < r$.
Ainsi, on peut dresser le tableau de signe, et obtenir pour ensemble de solutions :
$\boxed{\mathcal{S}_m =]-\infty, -\sqrt{m^2+1}] \cup]-m, \sqrt{m^2+1}]}$.

b) $x^2 + m(1-x) = 2x - m \iff x^2 - (m+2)x + 2m = 0$.
Ce trinôme a pour discriminant $\Delta_m = (m+2)^2 - 8m = (m-2)^2$.

- Cas 1 : Si $m = 2$, alors $\Delta_m = 0$, et donc le trinôme a une unique racine réelle, donnée par $x_0 = \dfrac{m+2}{2} = 2$.
  Dans ce cas, on a donc $\mathcal{S}_2 = \{2\}$.
- Cas 2 : si $m \neq 2$, alors $\Delta_m > 0$, et donc le trinôme admet deux racines réelles, données par $x = \dfrac{m+2 \pm (m-2)}{2}$, c'est-à-dire m et 2. On a alors $\mathcal{S}_m = \{2, m\}$.
- En conclusion : $\boxed{\text{si } m = 2, \mathcal{S} = \{2\}, \text{ et sinon, } \mathcal{S} = \{2, m\}}$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $y = e^x \in \mathbb{R}_+^*$. L'équation est alors équivalente à :
$y^2 - (m+1)y + m = 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta_m = (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2$.
Un raisonnement quasiment identique à celui de la question d'avant donne les racines du trinôme en fonction de m.
On revient ensuite à l'inconnue x, avec $x = \ln(y)$, mais bien sûr seulement pour les $y > 0$!
On obtient finalement comme ensemble de solutions :
$\boxed{\mathcal{S} = \{0\} \text{ si } m = 1 \text{ ou } m \leq 0, \text{ et } \mathcal{S} = \{0, \ln(m)\} \text{ dans tous les autres cas !}}$
