TD Ch 1 – Manipuler des réels

I. Calculs

Tout est à réaliser **sans calculatrice** !

1. Calculer rapidement, si possible de tête :

A $= 72 \times 57 - 72 \times 37$ B $= 94 \times 73 + 94 \times 27$ C $= 23 \times 41 - 23 \times 71$

D $= 22 \times 99$ E $= 25 \times 98$ F $= 91 \times 89$

G $= \left(9 \times (4 + \frac{1}{5})\right) + \left(9 \times (3 + \frac{4}{5})\right)$ H $= 22^2 - 2^2$ I $= 6^2 - 40^2$

J $= 89^2$ K $= 72 \times 68$ L $= 7,9^2 - 2,1^2$

---

2. Soient $a, b > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Écrire sous forme simplifiée :

A $= \dfrac{7}{6} - \dfrac{9}{4}$ B $= 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{3}}$ C $= \dfrac{\frac{3}{4} - \frac{5}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{4}{5}}$

D $= \dfrac{3^7 \times 3^{-3}}{3^4}$ E $= \dfrac{3}{7} \times \left(\dfrac{11}{3} - \dfrac{12}{5}\right) + \left(\dfrac{3}{7} - \dfrac{11}{3}\right) \times \dfrac{12}{5}$

F $= \sqrt{\dfrac{4}{9}}$ G $= \sqrt{9800}$ H $= \dfrac{a^{-4}b^3a^3}{(ab^2)^{-2}}$

I $= \dfrac{1}{a^{2n}} \dfrac{(ab^3)^n\,(a^{2n} - b^{2n})}{a^n + b^n}$ J $\sqrt{0,62}^2$ K $= \sqrt{\left(1 - \sqrt{2}\right)^2}$

L $= \left|(-1)^n\sqrt{3}\right|$ M $= 3^n + 3^{n+1}$ N $= 5 \times \dfrac{\frac{1}{5^{n+1}}}{\frac{1}{5^n}}$

O $= \dfrac{a^n - a^{2n}}{(2a)^n}$ P $= \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2^{n+1}}$ Q $= \dfrac{\left(a^{n^2}\right)^2}{a^n}$

---

3. Écrire sous la forme $a + b\sqrt{n}$ avec a, b rationnels et $n \in \mathbb{N}$ le plus petit possible.

A $= -5\sqrt{18} + 6\sqrt{32} - \sqrt{50}$ B $= \dfrac{6}{\sqrt{2}}$ C $= \dfrac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$

D $= \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ E $= \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}} - \dfrac{1}{2 + \sqrt{12}}$ F $= \dfrac{\sqrt{20} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{8}\left(\sqrt{10} - 5\right)}$

G $= 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\sqrt{3}}}$ H $= 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2 + \frac{2}{1+\sqrt{3}}}}$ I $= \sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}$

---

4. Soient $a, b, c, x \in \mathbb{R}$.

1. Développer :

   a) $(a - b + c)^2$ b) $(a + b)^3$ c) $(a - b)^4$ d) $\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$

2. Factoriser au maximum :

   a) $4x^2 - 12x + 9$ b) $1 + e^{2x} - 2e^x$ c) $x^4 - 1$ d) $(4x + 2)^2 - (x^2 - 2)^2$

---

5. Simplifier :

a) $\ln(e^x) + e^{-\ln(x)}$ b) $\ln(\sqrt{x}) - \ln(x^2)$ c) $e^{2\ln(x) + \ln(x+1)}$

II. Inégalités

6. Montrer que la valeur absolue du produit de deux réels est inférieure ou égale à la moyenne de leurs carrés. Dans quels cas a-t-on égalité ?

---

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si $|x-2| \leq \frac{1}{4}$, alors $\left|1-\frac{x}{2}\right| \leq \frac{1}{8}$ et $|x^2-4| \leq \frac{17}{16}$.

---

8. Donner les bornes supérieures et inférieures (si elles existent !) des ensembles suivants, et dire si ce sont des maxima ou minima ou rien du tout.

a) $[-1;2[$ b) $\left\{1+\frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R}_+^*\right\}$ c) $\left\{5-\frac{3}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$

III. Équations et inéquations

9. Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(E_1) : $x^2+2x>0$ (E_2) : $x^2-2x+1>0$ (E_3) : $x(x+2)=2x(3x-4)$

(E_4) : $x^3-x=x^2+2$ (E_5) : $x^2-6x+9 \leq 0$ (E_6) : $x^2<2$

(E_7) : $x^3-2x-1=x-3$ (E_8) : $x^3+7x^3-1=0$ (E_9) : $1-x^4 \geq 0$

(E_{10}) : $x^4-3x^2-4=0$ (E_{11}) : $\frac{-2}{x+3}=x$ (E_{12}) : $\frac{-2}{x+3}<x$

(E_{13}) : $\frac{x+1}{x-1} \leq \frac{x-3}{x+2}$ (E_{14}) : $\frac{2}{x}+\frac{4}{x+4}>1$ (E_{15}) : $\frac{2x}{4x^2-1} \leq \frac{2x+1}{4x^2-4x+1}$

---

10. Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(F_1) : $\sqrt{x+7}=5-x$ (F_2) : $\sqrt{x^2+2x}<x+1$ (F_3) : $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1} \geq 5$

(F_4) : $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}+1$ (F_5) : $\sqrt{x^2-1} \geq x$ (F_6) : $|x+1|=\sqrt{x}$

(F_7) : $|x-1| \leq 1-2x$ (F_8) : $x^2+3|x|-10 \leq 0$ (F_9) : $|x^2-3x+1|=|x-2|$

(F_{10}) : $x-7\sqrt{x}+6 \geq 0$ (F_{11}) : $|x^2-5x+3| \leq |x+2|$

---

11. Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(G_1) : $\frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}}=e$ (G_2) : $\ln(2x+1)-\ln(x-3) \leq 0$ (G_3) : $\left(e-e^{2x}\right)\left(e^x-1\right)>0$

(G_4) : $\ln(x)^2-3\ln(x)-4 \leq 0$ (G_5) : $e^{2x}+3e^x-1=0$ (G_6) : $\ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)<\ln(2)$

(G_7) : $e^x+e^{x+1}>e^{2x}+e$ (G_8) : $\ln(x)+\ln(5-x)=-2$ (G_9) : $e^x-e^{-x}=3$

(G_{10}) : $e^{\sin(x)}-\frac{4}{e^{\sin(x)}} \geq 0$

---

12. À l'aide d'une étude de fonctions, résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

a) $\sin(x) \leq x$ b) $e^x-1 \geq x$ c) $\sin(x) \geq \frac{\pi x}{2}$

---

13. Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(E_1) : $\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=-3$ (E_2) : $\lfloor e^x\rfloor=2$ (E_3) : $0<\lfloor x^2\rfloor \leq 4$ (E_4) : $\left\lfloor\sqrt{x^2+1}\right\rfloor=2$

14.

1. Résoudre, en fonction du paramètre $n \in \mathbb{Z}$, les (in)équations suivantes d'inconnue x réelle :

   a) $2^n x+3^n \leq 2^{n+1}x-6^n$ b) $(-2)^n x+2^n>0$ c) $x^2-2^n x-2^{2n+1} \geq 0$

2. Discuter suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ du nombre de solutions réelles de l'équation :

$$e^{2x}-2(m+1)e^x+1=0$$

---

15. Résoudre les équations et inéquations suivantes suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

a) $\frac{1}{x+m} \geq x-m$ b) $x^2+m(1-x)=2x-m$ c) $e^x+me^{-x}-m-1=0$
