TD Ch 10 – Dénombrements

I. Entraînement

1. Combien d'élèves faut-il avoir dans un lycée pour être certain de trouver (au moins) deux élèves qui possèdent les mêmes initiales ?
On restreint les initiales à la première lettre du prénom et du nom de famille, par exemple N.H.

---

2. Donner le nombre d'anagrammes des mots suivants :

a) MATHS b) DODO c) ANANAS d) ANAGRAMME e) MISSISSIPPI

---

3. Jérémy distribue des prospectus dans une rue qui contient 15 boîtes aux lettres. Il ne reste plus que 10 prospectus à Jérémy. Combien a-t-il de manière de faire sa distribution si :

1. Les prospectus sont tous identiques, et Jérémy place au plus un prospectus par boîte-aux-lettres.
2. Les prospectus sont tous différents, et Jérémy place au plus un prospectus par boîte-aux-lettres.
3. Les prospectus sont tous différents, et Jérémy place un nombre quelconque de prospectus dans chaque boîte-aux-lettres.

---

4. Un sac de décoration de Noël contient 5 boules rouges et 8 boules dorées, toutes discernables (décorées différemment). On effectue 6 tirages dans le sac.

1. On suppose qu'on tire successivement et sans remise.
   (a) Combien y a-t-il de résultats possibles en tout ?
   (b) Combien de ces résultats amènent exactement 4 boules rouges puis 2 boules dorées ?
   (c) Combien de ces résultats amènent exactement 1 boule dorée ?
   (d) Combien de ces résultats amènent au moins 2 boules dorées ?
   (e) Combien de ces résultats amènent deux fois plus de boules rouges que de boules dorées ?
2. Répondez aux mêmes questions dans le cas où le tirage s'effectue avec remise.
3. Répondez aux mêmes questions dans le cas où on tire les 6 boules simultanément.

---

5. Le bureau d'une association contient un président, un secrétaire et un trésorier. Les membres du bureau sont à choisir parmi les 10 membres du CA, dont 6 sont des hommes et 4 des femmes.

1. Déterminer le nombre de bureaux différents possibles.
2. Combien de bureaux peut-on former avec une femme comme présidente et un homme comme secrétaire ?
3. Combien de bureaux exclusivement féminins peut-on former ?
4. Combien de bureaux mixtes ?
5. Combien de bureaux peut-on former sachant que Mr X refuse de siéger avec Mme Y ?

---

6. Un gardien de zoo nourrit ses singes. Il dispose d'un panier de 20 fruits, tous différents, et doit nourrir les 12 singes de l'enclos.

1. Combien a-t-il de manière de nourrir les singes en distribuant exactement un fruit à chaque animal ?
2. Combien a-t-il de manière de nourrir les singes en distribuant tous les fruits, de sorte que chaque singe ait un nombre quelconque de fruits ?

---

7. On a n enfants. Combien de manière a-t-on de les disposer en file indienne ? En rond ?
Bonus : et en rang 2 par 2 ? Le sens gauche-droite n'a aucune importance, mais l'ordre du rang importe.

II. Niveau 2

8. Un ascenseur dessert 8 étages. 6 personnes montent au rez de chaussée. Combien de possibilités y a-t-il pour que :

1. Personne ne descende au troisième étage ?
2. Deux personnes au moins descendent au même étage ?
3. Deux personnes exactement descendent au même étage, et les autres à des étages tous différents ?

---

9. Un tournoi de boxe fait s'affronter $2n$ boxeurs. Combien y a-t-il de manières d'organiser le premier tour, sachant que :

1. On s'intéresse à la fois aux joueurs opposés et à l'ordre des matchs.
2. On s'intéresse seulement aux paires de joueurs opposés.

---

10. Une grosse valise contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures marrons et une paire de chaussures blanches. On récupère deux chaussures au hasard dans la valise.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien de tirages permettent d'obtenir deux chaussures de la même couleur ?
3. Combien de tirages permettent d'obtenir une chaussure droite et une chaussure gauche ?
4. Combien de tirages amènent deux chaussures bien appariées ? (Gauche-droite, de la même couleur)

---

11. Au poker, on considère une main de 5 cartes distribuées parmi un jeu de 52 cartes.

1. Combien de main différentes peut-on former ?
2. Combien y a-t-il de mains contenant exactement deux paires ? (mais pas de brelan !)
3. Combien y a-t-il de mains contenant au moins un cœur ou une dame ?
4. Combien y a-t-il de mains contenant exactement 3 cœurs et exactement une dame ?
5. Combien y a-t-il de mains contenant un carré ? Un full ?
6. Combien y a-t-il de possibilités d'avoir 5 cartes dont les rangs se suivent ?

---

12. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*, p \leq n$. Combien de manière y a-t-il de disposer p jetons indiscernables sur un damier de côté n, de sorte que deux jetons ne se trouvent jamais sur une même colonne si sur une même ligne ?

---

13. Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

1. Combien y a-t-il de nombres entiers avec au plus r chiffres ?
2. Combien y a-t-il de nombres entiers avec exactement r chiffres ?
3. Combien y a-t-il de nombres entiers avec r chiffres tous différents ?
4. Combien y a-t-il de nombres entiers avec r chiffres r différents dans l'ordre croissant strict ? (Par exemple : 1359 convient mais par 1325 si 1336.)
5. (*) Combien y a-t-il d'entiers avec au plus r chiffres, et dont la somme des chuffres est égale à 3 ?

14.

1. Combien peut-on former de nombres avec de 5 chiffres distincts parmi $1, 2, 3, 4, 5$?
2. On range tous ces nombres par ordre croissant. À quelle position dans la liste se trouvera le nombre 23154 ?
3. (*) Calculer la somme de tous les nombres de la liste.

---

15. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Rappeler le nombre de parties de E.
2. En déduire le nombre de couples (A, B) de 2 parties de E.
3. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E qui vérifient $B \subset A$.
   Indication : On pourra d'abord considérer les couples convenables qui vérifient $\text{Card}(A) = k$, k fixé.
4. En déduire le nombre de couples (A, B) de parties de E qui vérifient $A \cap B = \varnothing$.
   Indication : On pourra considérer $(\overline{A}, B)$.
5. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties **non vides disjointes** de E.

III. Dénombrements et applications

16. Soient E et F deux ensembles finis, de cardinal respectif noté $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer en fonction de n et m :
   (a) le nombre d'applications injectives de E dans F.
   (b) le nombre d'applications bijectives de E dans F.
2. Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre d'applications surjectives de E dans F :
   (a) $n = 5$ et $m = 6$
   (b) $n = 5$ et $m = 5$
   (c) $n = 6$ et $m = 5$
3. On suppose que $m = n - 1$. Combien y a-t-il de surjections de E dans F ?

---

17. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$.
2. Déterminer le nombre d'applications croissantes (au sens large), de $[\![1, 3]\!]$ dans $[\![1, 5]\!]$.
3. Pour toute fonction $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, p]\!]$, on note $\widetilde{f}$ la fonction définie par :

$$\widetilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1, n]\!] & \to & [\![1, p + n - 1]\!] \\ k & \mapsto & f(k) + k - 1 \end{array} \right.$$

   (a) Montrer que pour toute fonction $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, p]\!]$ et pour tout $k \in [\![1, n - 1]\!]$, on a :
   $\widetilde{f}(k + 1) - \widetilde{f}(k) = f(k + 1) - f(k) + 1$.
   En déduire que f est croissante si et seulement si $\widetilde{f}$ est strictement croissante.
   (b) Soit $h : [\![1, n]\!] \to [\![1, p + n - 1]\!]$ strictement croissante.
   Montrer par récurrence (finie) que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $f(k) \geq k$.
   En déduire qu'il existe une unique fonction $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, p + n - 1]\!]$ telle que $\widetilde{f} = h$.
   (c) À l'aide des questions précédentes, déterminer le nombre d'applications croissantes (au sens large) de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$.

---

18. (**) On admet que le nombre d'applications croissantes de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$ vaut $\binom{p+n-1}{n}$ pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que le nombre de n-uplets $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ qui vérifient $k_1 + \ldots + k_n \leq p$ est $\binom{n+p}{n}$.
   On considérera les applications $\left\{ \begin{array}{ccc} [\![1, n]\!] & \to & [\![1, p + 1]\!] \\ i & \mapsto & 1 + k_1 + \ldots + k_i \end{array} \right.$
2. En déduire que le nombre de n-uplets $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ qui vérifient $k_1 + \ldots + k_n = p$ vaut $\binom{n+p-1}{n-1}$.
   On utilisera la formule de Pascal.
3. Vous souhaitez répartir 47 fraises tagada entre 10 enfants. Combien avez-vous de manières de faire ?
4. Comme vous êtes quand même un peu gentil, combien avez-vous de manières de faire pour que chaque enfant ait au moins un bonbon ?

IV. Formules démontrées par le dénombrement

19. Soient $a, b, n \in \mathbb{N}$. On considère une urne contenant a boules blanches et b boules noires, toutes distinctes (numérotées par exemple).
On effectue n tirages avec remise dans l'urne.

1. Sans s'intéresser à la couleur des boules, combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Combien y a-t-il de tirages qui contiennent exactement k boules blanches ?
3. En déduire une autre manière de dénombrer l'ensemble des tirages possibles.
4. Quelle formule du cours retrouve-t-on ?

---

20. En s'inspirant très fortement de l'exercice précédent, proposer une manière de démontrer la **formule de Vandermonde**, selon laquelle pour tous $a, b, n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{n-k}\binom{b}{k}$$

V. Dénombrements et suites

21. On considère le quadrillage $\mathbb{N}^2$, du quart de plan à coordonnées entières positives.
On appelle **chemin croissant** tout parcours qui suit ce quadrillage en utilisant des déplacement vers le haut ou la droite.

1. Combien existe-t-il de chemins croissants de longueur n partant de l'origine $(0, 0)$?
2. Combien existe-t-il de chemins croissants qui relient l'origine au point de coordonnées $(n, m) \in \mathbb{N}^2$?
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note C_n le nombre de chemins qui relient $(0, 0)$ à (n, n) **sans jamais dépasser la diagonale**.
   (a) Déterminer C_0, C_1, C_2 et C_3.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le nombre de chemins convenables qui ne touchent jamais la diagonale entre le départ et l'arrivée est égal à C_{n-1}.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. On considère les chemins convenables qui touchent la diagonale pour la dernière fois en (k, k) avant l'arrivée. Montrer que le nombre de tels chemins vaut $C_k C_{n-k-1}$
   (d) En déduire que $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$
   (e) Vérifier la valeur obtenue pour C_3, et calculer C_4 et C_5.

---

22. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse à l'ensemble noté E_n des mots de n lettres formés uniquement avec les lettres "a" et "b", et ne contenant jamais deux "a" consécutifs.
On note U_n l'ensemble de ces mots finissants par un a et W_n l'ensemble de ces mots finissant par un b.
On pose enfin $u_n = \text{Card}(U_n)$ et $w_n = \text{Card}(W_n)$.

1. Déterminer u_1, u_2, u_3 et v_1, v_2, v_3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\begin{cases} u_{n+1} &= w_n \\ w_{n+1} &= u_n + w_n \end{cases}$
3. En déduire une relation de récurrence d'ordre 2 pour la suite (u_n), puis une expression explicite de u_n et v_n en fonction de n.
4. Déterminer finalement le cardinal de l'ensemble E_n en fonction de n.
5. *Application :* Soit $n \in \mathbb{N}$. Combien y a-t-il de parties de $[\![1, n]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs ?
6. (**) *Facultatif.* Dénombrer astucieusement le nombre de parties de $[\![1, n]\!]$ *de cardinal* k et ne contenant pas deux entiers consécutifs, avec $k \in [\![1, n]\!]$ fixé.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}$, où $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci.
