TD Ch 11 – Matrices

I. Notions élémentaires

1. On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

1. Calculer, lorsque cela est possible : $A+B$, AB, BA, A^2, AC, $B^\top A^\top$, CA, C^2, $(C-2I_3)^3$, XB et $B^\top X$
2. Résoudre l'équation d'inconnue X : $CX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

---

2. Représenter la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans le cas suivants :

a) $a_{i,j} = i + j$ b) $a_{i,j} = \max(i, j)$ c) $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ d) $a_{i,j} = |j - i|$

---

3. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.
2. En déduire les matrices $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA = 0$.

---

4. Déterminer les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, puis avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

---

5. On dit qu'une matrice N est nilpotente s'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $N^r = 0$.

1. Montrer qu'une matrice de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est toujours nilpotente.
2. Montrer par l'absurde qu'une matrice nilpotente ne peut pas être inversible.

II. Rangs et inverses

6. On considère le système $\begin{cases} -x + 3y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

1. Donner la matrice A associée au système et calculer son déterminant.
2. Déterminer l'inverse de A, et en déduire les solutions du système.

---

7. Dans chaque cas, déterminer le rang de A, et son inverse si elle est inversible.

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

8. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 8 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$. Étudier l'inversibilité de A selon les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

---

9. On considère le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & 4z & = & 1 \\ 4x & + & 3y & + & z & = & -2 \\ x & + & 2y & + & 4z & = & 7 \end{array} \right.$

1. Écrire le système sous forme matricielle.
2. Montrer que la matrice associée au système est inversible et calculer son inverse.
3. Résoudre le système.

---

10. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, et en déduire une relation qui exprime A^2 en fonction de A et I_3.
2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

---

11. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculer $(A - I_3)^2$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

---

12. Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} \in \mathbb{C}$. On rappelle que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Calculer A^4. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

---

13. On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de $A - \lambda I_3$ en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'équation $(A - \lambda I_3)X = 0$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

---

14 (Matrices de rotation). Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{R} = \{M_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que $I_2 \in \mathcal{R}$.
2. Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{R}$ est encore un élément de $\mathcal{R}$ qu'on déterminera.
3. En déduire que les matrices de $\mathcal{R}$ commutent deux à deux.
4. En déduire également tout élément de $\mathcal{R}$ est inversible d'inverse dans $\mathcal{R}$ qu'on déterminera.

---

15. (*) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $M^2 = (a + d)M - (ad - bc)I_2$.
2. En déduire que si $ad - bc \neq 0$, alors M est inversible, et donner son inverse.
3. Que devient la relation si $ad - bc = 0$? M peut-elle être inversible ?

III. Méthodes classiques de calculs de puissances

16. Soit $A = \begin{pmatrix} 18 & 9 & -12 & -15 \\ -12 & -6 & 8 & 10 \\ 24 & 12 & -16 & -20 \\ 36 & 18 & -14 & -30 \end{pmatrix}$. On note $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice ligne $L \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathcal{R})$ telle que $CL = A$.
2. En déduire une expression simple de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

---

17. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les puissances de N.
2. Exprimer A à l'aide de N et I_n, et en déduire une expression simple de A^n en fonction de n.
3. Sur le même modèle, calculer M^n en fonction de n, où $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

---

18. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2. J est-elle inversible ?
2. Calculer J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = (-1)^n I_n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 3^{k-1} J$.
4. En déduire une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
5. Soient $(x_n), (y_n), (z_n)$ trois suites réelles définies par $x_0 = y_0 = z_0 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} x_{n+1} &= y_n + z_n \\ y_{n+1} &= x_n + z_n \\ z_{n+1} &= x_n + y_n \end{cases}$
   (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (b) En déduire les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

---

19. Soit $N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On souhaite exprimer N^n en fonction de n.

1. Calculer N^2, et en déduire des valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ telles que $N^2 = aN + bI_3$.
2. N est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels u_n et v_n tels que $N^n = u_n N + v_n I_3$. On donnera les relations de récurrence qui lient les suites (u_n) et (v_n).
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n$, et en déduire le terme général de u_n puis de v_n.
5. Conclure.

---

20. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$.
2. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
3. En déduire le terme général des suites (a_n) et (b_n).

21. On considère $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$. On dit qu'on a "diagonalisé" la matrice A.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. En déduire les puissances de la matrice A.

---

22. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que $P^{-1}AP = D$.

1. Exprimer A en fonction de D.
2. Exprimer A^n en fonction de P et D pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que A est inversible si et seulement si D l'est, et qu'on a alors $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.
4. Avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$: vérifier l'inversibilité de P, calculer $P^{-1}MP$, en déduire les puissances de M, et étudier son inversibilité.
5. Même exercice avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

IV. Bilan

On étudie la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$: inversibilité et puissances successives.

On réalise l'étude de 3 manières différentes, toutes indépendantes.

1. Méthode de « diagonalisation ».
   (a) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}
   (b) Calculer $D = P^{-1}AP$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A^n = PD^nP^{-1}$, et en déduire l'écriture de A^n en fonction de n.
   (d) Justifier que D est inversible, et en déduire que A est inversible.
   (e) Exprimer A^{-1} en fonction de D^{-1} et P, puis calculer A^{-1}.
2. Méthode du binôme de Newton.
   (a) On pose $B = A - 2I_3$. Montrer que $B^2 = B$.
   (b) En déduire une expression de B^n en fonction de n et B, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut B^0 ?
   (c) En déduire alors une expression explicite de A^n en fonction de n.
3. Méthode du « polynôme annulateur »
   (a) Montrer que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3$.
   (b) En déduire que A est inversible, et exprimer A^{-1} en fonction de A.
   (c) Montrer que pour tout tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_nA + b_nI_3$. On donnera les relations de récurrence reliant les suites (a_n) et (b_n).
   (d) Montrer que (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, et en déduire les expressions explicites de a_n et b_n en fonction de n.
   (e) En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (f) En reprenant l'expression de A^{-1} en fonction de A, calculer $A^{-n} = \left(A^{-1}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.