TD Ch 12 – Équations différentielles usuelles

I. Ordre 1

1. Résoudre les équations différentielles suivantes.

a) $y' + y = x^2 + x + 1$ b) $y' + ty = t^3$ c) $y' - 3t^2y = t^2$

d) $y' + 3y = (5x+1)\mathrm{e}^{-3x}$ e) $y' + 3t^2y = t^2 + \mathrm{e}^{-t^3}$ f) $y' + y = \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}$

g) $y' - y = \sin x$ h) $\frac{1}{2}y' - y = x\cos(2x)$ i) $y' - iy = (1-x)\mathrm{e}^{ix}$

---

2. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

a) Sur $\mathbb{R}$, $\begin{cases} 3y' + y = 2x + 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ b) Sur $]1, +\infty[$, $\begin{cases} t\ln(t)y' + y = -\dfrac{1+\ln(t)}{t} \\ y(\mathrm{e}) = 0 \end{cases}$

c) Sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, $\begin{cases} \tan(t)y' + y - \sin(t) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$ d) Sur $]-1, +\infty[$, $\begin{cases} (x+1)y' + xy = x^2 - x + 1 \\ y(1) = -1 \end{cases}$

---

3. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f(x) = 3x \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

---

4. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle suivante : $x^2 + y^2 + 2xyy' = 0$.
On posera la fonction auxiliaire $z = y^2$.

II. Ordre 2 à coefficients constants

5 (Homogènes). Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' - 5y' + 6y = 0$ b) $2y'' - 3y' - 5y = 0$ c) $y'' + y' + y = 0$

d) $\frac{1}{4}y'' + y' + y = 0$ e) $y'' + 5y = 0$ f) $y'' - 2y' + ay = 0 \quad a \in \mathbb{R}$

---

6. Résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 5 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

7.

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

   a) $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^x$ b) $y'' - 4y' + 4y = x\mathrm{e}^x$ c) $y'' - 2y' + 2y = x^2$

2. Résoudre : $y'' + y' + y = x\cos(x)$.
   On cherchera une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = (ax+b)\cos(x) + (cx+d)\sin(x)$

---

8. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel suivant : $\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases}$

---

9. Déterminer l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + 2f(x) + \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x$

---

10. Déterminer les fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(-x)$.

---

11. On veut résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation (E) : $x^2y'' + xy' - 4y = 4x^2$.

1. En notant $y(x) = z(\ln x)$ montrer que z vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, notée (E').
2. Résoudre (E'), puis en déduire les solutions de (E).

III. Modélisation

12. Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.
En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à 1000.
Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000).

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0, +\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :
$$(E) \quad y' = -\frac{1}{20}y(3 - \ln(y))$$

1. Soit f une fonction dérivable, strictement positive sur $\mathbb{R}^+$.
   Montrer que f vérifie, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $f'(t) = -\dfrac{1}{20}f(t)[3 - \ln(f(t))]$, **si et seulement si** la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $g'(t) = \dfrac{1}{20}g(t) - \dfrac{3}{20}$.
2. Donner la solution générale de l'équation différentielle : $(H) \quad z' = \dfrac{1}{20}z - \dfrac{3}{20}$.
3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0, +\infty[$
   $$f(t) = \exp\left[3 + C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right]$$
4. Déterminer avec les données de l'énoncé la valeur de C.
5. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$.
6. Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la population aura-t-elle moins de 20 individus ?

---

13 (Température d'un corps chaud). On peut montrer que l'évolution de la température d'un corps chaud (plat sortant du four ou autre) placé dans une pièce de température constante suit la loi suivante : la variation de la température au temps t est proportionnelle à la différence entre la température du corps et celle de la pièce.

1. Justifier que la température $T(t)$ du corps chaud en fonction du temps vérifie l'équation différentielle :
   $$(E) \quad T'(t) + \alpha T(t) = \alpha T_{air}$$
   où α est une constante qu'on ne cherchera pas à déterminer, et T_{air} est la température de la pièce.
2. Le plat est sorti du four à une température 9 fois plus importante que celle de la pièce.
   Au bout de combien de temps sa température sera-t-elle divisée par 2 ? Que dire de la limite de $T(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?

---

14 (Loi de Fick). On étudie les échanges de dioxygène entre le sang et une cellule.

En notant $C_s(t)$ la concentration en dioxygène dans le sang, et $C_c(t)$ celle en dioxygène dans la cellule, la loi de Fick nous donne l'équation différentielle suivante :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad C_s'(t) = \rho(C_c(t) - C_s(t))$$
où ρ est une constante positive représentant les données du système.

On considère qu'à $t = 0$, au début des échanges, le sang est chargé en dioxygène à une concentration $C_0 > 0$ et la cellule est vidée de tout dioxygène. De plus on considère que la quantité totale de dioxygène dans le système est constante (pas de perte lors des échanges).

1. En utilisant la conservation de la quantité de dioxygène, exprimer $C_c(t)$ en fonction de $C_s(t)$ et C_0 pour tout $t \in \mathbb{R}$
2. En déduire une équation différentielle vérifiée par $C_s(t)$ uniquement.
3. Résoudre cette équation différentielle et trouver la valeur de $C_s(t)$ et de $C_2c(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

4. Exprimer en fonction de ρ le temps à partir duquel la concentration en dioxygène sera deux fois plus importante dans le sang que dans la cellule.

---

15 (Pendule). En mécanique, lors de l'étude du pendule simple on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

où θ est l'angle du pendule par rapport à la verticale, t le temps, g l'accélération de la pesanteur, l la longueur du fil.
Conditions initiales : à $t = 0$, le pendule est lâché sans vitesse à partir d'un angle θ_0.
Déterminer l'équation horaire du mouvement.

---

16 (Datation au carbone 14). La concentration en radiocarbone (ie le rapport entre la quantité de Carbone 14 et la quantité totale de carbone) d'un échantillon de matière organique suit l'équation suivante, due à la désintégration radioactive du carbone 14 : $C'(t) = -\lambda C(t)$, où $C(t)$ représente la concentration en fonction du temps t, et $\lambda > 0$ est la constante de radioactivité du carbone 14.
Au temps 0, la concentration en radiocarbone est assimilable à celle de l'atmosphère, et vaut environ $C_0 = 10^{-12}$.

1. Exprimer la concentration en radiocarbone de l'échantillon au cours du temps.
2. Le temps de demie-vie du carbone 14 correspond au temps qu'il faut pour que la concentration en radiocarbone soit divisée par 2. Exprimer le temps de demie-vie $t_{\frac{1}{2}}$ en fonction de la constante λ.
3. On donne $t_{\frac{1}{2}} = 5730$ans environ. Estimer l'âge d'un échantillon dont la concentration en radiocarbone vaut $C = 8 \times 10^{-13}$
