TD Ch 13 – Limites de suites

I. Exercices théoriques

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Écrire avec des quantificateurs chacune des assertions suivantes, puis sa négation :

a) (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

b) (u_n) est bornée.

c) (u_n) diverge vers $-\infty$

d) (u_n) converge vers 0.

2.
1. Une suite convergente est-elle nécessairement monotone à partir d'un certain rang ?
2. Une suite qui diverge vers $+\infty$ est-elle nécessairement croissante à partir d'un certain rang ?
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0. Que dire de la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$?

---

3. On dit qu'une suite est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.
1. Écrire cette propriété avec des quantificateurs.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs entières. Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) est stationnaire.

II. Entraînements

4. Étudier la monotonie des suites de terme général suivant :

a) $u_n = \dfrac{n!}{2^{n+1}}$

b) $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right) - n$

c) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1}$

d) $u_n = n + 2(-1)^n$

e) $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$

f) $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$

---

5. Pour chacune des expression ci-dessous, étudier la convergence de la suite associée et préciser sa limite éventuelle :

a) $\dfrac{n^3 - 2n^2 + 1}{3 - n^2}$

b) $\dfrac{n}{n-1} e^{\frac{1}{n}}$

c) $\dfrac{e^{\sqrt{n}}}{n^2}$

d) $\dfrac{7^{n+1} + 4^{n+1}}{7^n + 4^n}$

e) $1 - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{25} - \dfrac{1}{125} + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{5^n}$

f) $\ln(n+1) - 2\ln(n)$

g) $\dfrac{1 + (-1)^n}{n}$

h) $\dfrac{n}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$

i) $n^{\frac{1}{n}}$

j) $n^2 - n\cos(n) + 2$

k) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^2 + nk + k^2}{n^3}$

l) $(n^2 + n + 1)^{\frac{1}{n}}$

m) $\ln\left(\dfrac{e^n + n^2}{2n+1}\right)$

n) $\dfrac{\pi^n - (3,15)^n}{\sqrt{2}^n - (1,42)^n}$

o) $\dfrac{n^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{3}} + 2}$

III. Utilisation d'inégalités et théorèmes de convergence/divergence

6. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$.
On suppose que la suite $(u_n w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. Étudier la convergence des suites (u_n) et (w_n).

7.
1. Montrer que pour tous réels x, y, on a : $x^2 + xy + y^2 \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites, telles que la suite $(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   Montrer qu'alors les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0.

---

8. Montrer que les suites suivantes n'admettent pas de limite :

a) $u_n = \frac{1}{2}(1+(-1)^n)$ b) $v_n = n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

9.
1. Montrer que : $\forall x > 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire la convergence de la suite de terme général $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

---

10. Soit $K \in]0,1[$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1}| \leq K|u_n|$.
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| \leq K^n|u_0|$.
2. En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.

---

11. À l'aide du théorème d'encadrement, montrer que les suites suivantes convergent et déterminer leur limite :

a) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k}$ b) $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^4+k}}$ c) $c_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$

---

12. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$, avec $u_0 < v_0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n < v_n$.
2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. On introduit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $w_n = 2u_n + 3v_n$. Donner la nature de la suite (w_n).
4. En déduire la valeur de la limite des suites (u_n) et (v_n). On l'exprimera à l'aide de u_0 et v_0.

---

13. Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$, $v_1 = 12$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = v_n - u_n$. Déterminer le terme général de w_n.
2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = 3u_n + 8v_n$. Donner le terme général de t_n, et en déduire la limite commune de (u_n) et (v_n).

---

14 (Suite harmonique). On étudie la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad S_{2n} - S_n \geq \dfrac{1}{2}$.
3. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

---

15 (Moyenne arithmético-géométrique)**.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. On définit deux suites $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par : $u_0 = a$, $v_0 = b$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et deux flottant a et b, et qui renvoie la valeur de u_n.
2. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$, et en déduire que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tous réels x, y avec $0 \leq x \leq y$: $\dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \leq \dfrac{1}{2}(y-x)$.
4. En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leq \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.
5. Montrer finalement que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
6. On note `MAG(a,b)` la limite commune des deux suites (elle s'appelle la "moyenne arithmético-géomitrique" des nombres a et b). Écrire une fonction Python qui prend en argument trois flottants `a, b, epsilon` et qui renvoie la valeur de `MAG(a,b)` approchée à `epsilon` près.

IV. Équivalents

16. Donner un équivalent le plus simple possible pour chacune des expressions suivantes, et en déduire leur limite éventuelle en $+\infty$.

a) $10n^2 - 5n + 3$

b) $5n^2\sin(n) - 3n^3$

c) $3n! - n^{100} + 100^n$

d) $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$

e) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

f) $2^{n+2} + 3^{n+1} + 4^n$

g) $\dfrac{n(2n^2-3)}{5n+2}$

h) $\dfrac{2e^n + n^6}{n^3 - \ln(n^5) + n}$

i) $\dfrac{\ln(n) - \cos(n)}{n^3 + n^2\ln(n)}$

j) $3n\left(\exp\left(-\dfrac{1}{n^2}\right) - 1\right)$

k) $\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$

l) $n^2\left(\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right) - 1\right)$

m) $4n\ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

n) $\sqrt{1 + \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)} - 1$

o) $n^2\sin\left(\dfrac{1}{3n}\right)$

p) $\dfrac{3(n+4)(n^2-1)}{e^{-n} - 2n^3}$

q) $\dfrac{n^2e^{-n} - \ln^2(n) + n^2e^{2n}}{n^2\ln(n) + e^n\ln(n) + ne^n}$

r) $\dfrac{\sqrt{n^2+3} - n}{\sqrt{9n^2+1} - 3n}$

---

17. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$, et pour tout $n \geq 1$: $\quad u_{n+1} = \ln(n + u_n)$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
2. Justifier que pour tout $n_g e2$, $\quad u_{n+1} \geq \ln(n)$.
3. Que peut-on en déduire sur la convergence et la limite éventuelle de (u_n) ?
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x$.
5. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $u_n \leq \ln(2n)$.
6. En déduire que $u_n \sim \ln(n)$.
7. Montrer que $u_{n+1} - \ln(n) \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$.
