

TD Ch 14 – Vecteurs du plan et de l'espace

I. Vecteurs colinéaires, coplanaires, orthogonaux

1. 1. Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

a) $\begin{pmatrix} -42 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 35 \\ -10 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -545 \\ 132 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 27989 \\ -5555 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 60 \\ -12 \\ 48 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 45 \\ -8 \\ 36 \end{pmatrix}$

2. Les vecteurs suivants sont-ils coplanaires ?

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Proposer une méthode pour déterminer si trois vecteurs sont coplanaires ou non à l'aide d'une matrice.

4. La famille de vecteurs suivante est-elle liée ? $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

2. Soient $\vec{u} = (1, -1, 2)$ et $\vec{v} = (-2, 0, 1)$ deux vecteurs de l'espace.

1. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
2. Décrire l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$.
3. Déterminer l'ensemble des vecteurs qui sont à la fois orthogonaux à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

3. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, et $\vec{w}$ un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$. Montrer que $\vec{w}$ est orthogonal à toute combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

4. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

1. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les longueurs pour qu'un parallélogramme soit un rectangle.

5. Soit ABC un triangle non plat.

1. Montrer que pour tout point M , on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
 2. Soit H le point d'intersection des hauteurs issues de B et C . Déduire de la question précédente que H appartient aussi à la hauteur issue de A .
-

II. Droites et cercles du plan

6. Déterminer l'intersection de la droite $\mathcal{D} : 2x + 5y - 10 = 0$ et de la droite $\mathcal{D}'$ passant par $A(-1, 2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(3, 2)$.

7. Donner une équation cartésienne, un vecteur directeur et une équation paramétrique de la droite (AB) avec $A(2, 1)$ et $B(1, -2)$.

8. Soient $A(1, 1)$, $B(3, 4)$ et $C(-1, 2)$ trois points du plan.

1. Donner une équation cartésienne de la droite (AB) .
 2. Donner une représentation paramétrique de la droite (AC) .
 3. Les droites (AB) et (AC) sont-elles parallèles ? Perpendiculaires ?
 4. Déterminer les coordonnées de C' , projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) .
 5. Déterminer les coordonnées de B' , projeté orthogonal de B sur (AC) .
-

9. Soient $A(2, 1)$, $B(3, 4)$ et $\vec{u}_\alpha(1, \alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

On note $\mathcal{D}_\alpha$ la droite passant par A dirigée par $\vec{u}_\alpha$, et $\mathcal{C}$ le cercle de centre B et de rayon 2.

1. Déterminer une équation paramétrique et une équation cartésienne de $\mathcal{D}_\alpha$.
 2. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
 3. À quelle condition la droite et le cercle sont-ils sécants ? tangents ?
-

10. 1. Déterminer l'équation du cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[AB]$, où on a $A(3, 1)$ et $B(7, -1)$.

2. La partie $\mathcal{C}_2$ du plan définie par l'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 8x + y + 10 = 0$ est-elle un cercle ? Si oui, donner son centre et son rayon.
 3. Déterminer les points d'intersection des deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
-

11. 1. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x + y - 1 = 0$. Déterminer une équation paramétrique de $\mathcal{D}$.

2. Donner une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}'$ parallèle à $\mathcal{D}$ passant par $A(1, 1)$.
 3. Donner une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}''$ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par A .
-

12 (*). Soient $k \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On pose $A(4, 1)$, $B(-2, -3)$, $C(-2, 2)$ et $D(0, \alpha)$ quatre points du plan. Soit $\mathcal{C}_\alpha$ le cercle passant par les points C, D et O (l'origine du repère).

Soit $\Gamma_\alpha = \left\{ M \in \mathcal{P} \mid \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \rangle = k \right\}$.

1. Déterminer *sans calcul* qui est l'ensemble Γ_0 .
 2. Écrire une équation cartésienne de l'ensemble Γ_k . Pour quelles valeurs de k s'agit-il d'un cercle ? D'un point ? De l'ensemble vide ?
 3. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}_\alpha$.
 4. On pose $\alpha = 4$. Pour quelles valeurs de k $\mathcal{C}_\alpha$ et Γ_k sont-ils des cercles tangents ?
-

III. Plans et droites de l'espace

- 13.** 1. Déterminer une représentation paramétrique $\mathcal{P}$ qui passe par les points $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 3)$ et $C(-1, 0, 2)$.
2. En déduire une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
3. Le point $D(1, 2, 3)$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$?
4. Déterminer H le projeté orthogonal de D sur $\mathcal{P}$.
-

- 14.** Soit $A(0, -1, 4)$, $\mathcal{P} : x + 2y - 3z + 9 = 0$, et $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique :
- $$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$
1. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$ qui contient A et $\mathcal{D}$.
3. Déterminer l'intersection des deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
-

- 15.** Soit $A(0, 1, -1)$, $B(0, 0, 1)$ et $C(1, -1, 1)$.
1. Montrer que ces trois plans définissent un plan $\mathcal{Q}$ dont on donnera une équation cartésienne.
2. Pour $m \in \mathbb{R}$, on définit $\mathcal{P}_m$ le plan d'équation $x - my + mz = 1$. Donner un vecteur normal à $\mathcal{P}_m$.
3. Est-il possible que $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}_m$ soient parallèles? perpendiculaires?
-

- 16.** Soient $A(5, 2, 1)$, $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans l'espace.
1. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Donner une équation du plan normal à $\vec{u}$ et passant par A .
-

- 17.** Soient $\mathcal{P} : x - y + z = 1$ et $\mathcal{P}' : x + 2y + 3z = 6$.
Montrer que l'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}'$ est une droite, dont on donnera un vecteur directeur.
-

- 18.** On considère les points $A(1, 2, -1)$ et $B(-2, 4, 0)$.
1. Donner une représentation paramétrique et une représentation cartésienne de la droite (AB) .
2. Déterminer selon les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ l'intersection de (AB) avec la droite $\mathcal{D}_m$ représentée paramétriquement par :
$$\begin{cases} x = s + 3 \\ y = -2s + 2 \\ z = 2s + m \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

3.
-

- 19.** Déterminer un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ qui :
- contient $A(2, 1, 3)$
 - est parallèle au plan $\mathcal{P} : x + y + z = 3$
 - rencontre la droite $\mathcal{D}'$ d'équations cartésiennes $x = 1$ et $y = z$.
-