

TD Ch 15 – Partie 1 – Limites de fonctions réelles

I. Calculs de limites et d'équivalents

1. Étudier les limites suivantes (distinguer éventuellement limite à droite et à gauche)

- | | |
|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$ avec $a = 1$ et $a = +\infty$. | b) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ avec $a = -1$ et $a = -\infty$. |
| c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x + \sqrt{x}}{2x + \sin x}$ avec $a = +\infty$ et $a = 0$. | d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x - 1} + (x + 1)$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x + \sqrt{x+1}} - \sqrt{x + \sqrt{x-1}})$ | f) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{2x} + e^x + x}{e^x - x}$ avec $a = +\infty$ et $a = -\infty$. |
| g) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x + x - 1}{x + e^{-x}}$ avec $a = +\infty$ et $a = 0$. | h) $\lim_{x \rightarrow a} x \ln \left(\frac{x}{x-1} \right)$ avec $a = +\infty$ et $a = 0$. |

2. Déterminer les limites suivantes :

- | | | |
|---|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$ | b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - \cos(x)}{2 \cos^2(x) - 3 \cos(x) + 1}$ | c) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x^2 - 5x + 6} - \frac{2}{x^2 - 4x + 3} \right)$ |
|---|---|--|

3. Pour chacune des fonctions suivantes donner un équivalent, le plus simple possible au voisinage de 0 et de $+\infty$.

- | | | |
|--|---|---|
| a) $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 4$ | b) $f(x) = e^x + \sin x + \cos x - 5$ | c) $f(x) = e^x + e^{2x} + e^{3x} - 3$ |
| d) $f(x) = x^2 + \ln x - 3$ | e) $f(x) = \frac{\ln(1 + x^4)}{x^2}$ | f) $f(x) = x^\alpha + x^\beta \quad (\alpha < \beta)$ |
| g) $f(x) = \frac{e^{ax} - 1}{x - x^2}$ | h) $f(x) = \frac{\sqrt{e^x - 1}}{x + \ln(x) - 1}$ | i) $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}$ |

4. Déterminer les limites suivantes à l'aide d'équivalents :

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan x}$ | b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin x}$ | c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \tan x}{x \sin^2 x}$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 3x}{\sin 4x}$ | e) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) \cos \left(\frac{\pi x}{2} \right)$ | f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{-4x}$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi x)}{2x^2 + x - 1}$ | h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$ | i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\sin(x-1)}$ |
| j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{-4x}$ | k) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi x)}{2x^2 + x - 1}$ | l) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(ax) - \cos(a)}{e^{ax} - e^a}$ |

5. Étudier les limites suivantes.

- | | | |
|---|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ | b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ | c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{-4x}$ |
|---|---|--|

6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = x \ln \left(1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\ln(x)} \right)$

1. Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}$.
2. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\ln(x)} \right)^x - 1 \right) \ln x$

II. Utilisation des propriétés de la limite

7. Étudier la limite en 0 de la fonction suivante : $f(x) = \frac{x}{2x + |x|}$.

8. Étudier la convergence de $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0.

9. Soit f une fonction T -périodique admettant une limite finie l en $+\infty$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(x + nT)$.

1. Montrer que (u_n) est constante.
 2. En déduire que f est constante.
 3. En déduire que la fonction $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.
-

10. Étudier les limites suivantes :

1. $f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ en $+\infty$.
 2. $g(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ en $+\infty$ et en 0.
 3. $h(x) = 1 - x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$, en 0.
 4. Pour $a, b > 0$: $k(x) = \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor$ et $l(x) = \frac{b}{x} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$ en 0.
Pour l , on pourra considérer les limites à gauche et à droite.
-

III. Fonctions négligeables

11. 1. Comparer au voisinage de 0 les fonction suivantes :

a) $(e^x - 1)^2$ et $x \sin x$ b) $e^{-\frac{1}{x^2}}$ et x^3 c) $\ln x \ln(1+x)$ et $\ln x^2 \sin^2 x$

2. Comparer au voisinage de $+\infty$ les fonction suivantes : $x \mapsto xe^x + \ln x$ et $x \mapsto \frac{x^2 e^{-x} - \ln^2 x + x^2 e^{2x}}{x^2 \ln x + e^x \ln x + x e^x}$

12. 1. Montrer que $\ln(\ln x) \underset{+\infty}{=} o(\ln x)$

2. En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)^x$.
