

TD Ch 15 – Partie 2 – Continuité

I. Étude de la continuité

1. Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } f(x) = \frac{\cos(\ln(|x|)) \ln(1+x)}{x-1} & \text{b) } f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} & \text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-4x)}{2x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \\
 \text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{5x^3 - 2x^2}{2x + x^2} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases} & \text{e) } f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} & \text{f) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x)}{e^{x^2} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

2. On définit une fonction h sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ si $|x| < 1$, et $h(x) = ax^2 + bx + c$ si $|x| \geq 1$. Déterminer les valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la fonction h est continue.

3. 1. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$. On pourra distinguer selon si $a < b$ ou $a \geq b$.
2. En déduire que si $f, g \in \mathcal{C}^0(I)$ sont deux fonctions continues sur un intervalle I , alors la fonction $\max(f, g) : x \mapsto \max(f(x), g(x))$ est encore une fonction continue sur I .

II. Prolongements par continuité

4. Pour chaque fonction, étudier sa continuité et dire si elle admet un prolongement par continuité aux bornes (finies) de son domaine de définition.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{b) } f(x) = \frac{1 - \cos(|x|)}{x^2} & \text{c) } f(x) = \frac{\sqrt{x} \ln(1+x)}{e^{2x^2} - 1} \\
 \text{d) } f(x) = \frac{6x^2 + 5x - 4}{2x - 1} & \text{e) } f(x) = \frac{2x + 2}{x^2 - 4x - 5} & \text{f) } f(x) = \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1} \\
 \text{g) } f(x) = \ln(\sqrt{x} - 1) - \ln(x - 1) & \text{h) } f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} & \text{i) } f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{1+x}} \\
 \text{j) } f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x} - 1} & \text{k) } f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{l) } f(x) = x \ln\left(\frac{x^2 - 1}{1}\right) \\
 \text{m) } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & \text{n) } f(x) = x^x & \text{o) } f(x) = (e^x + 2x)^{\frac{1}{x}}
 \end{array}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la continuité de $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{e^x - 1}$, et déterminer si elle admet un prolongement par continuité aux bornes de son domaine de définition.

6. Montrer que pour tout $a > -1$, la fonction f_a définie par $f_a(x) = |x|^a \sin(x) \sin(\frac{1}{x})$ admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$.

III. Utilisation des théorèmes de continuité

- 7.** 1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1$ admet trois solutions réelles.
2. Montrer que l'équation $x^{13} - 2x^8 + 3x^2 = 4$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^+$.
-

8. Étudier la fonction $f : x \mapsto x^3 - x + 1$, et montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle dans l'intervalle $] -2, -1[$.

Comment pourrait-on déterminer un encadrement de cette solution à 10^{-3} près ?

9. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, et $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$. On suppose que $f(a) < g(a)$ et $f(b) > g(b)$.

Montrer qu'il existe un réel $c \in [a, b]$ qui a la même image par f et par g .

10. Soit $T \in \mathbb{R}^*$, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et T -périodique.

1. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.
 2. Montrer qu'il existe un réel $c \in \mathbb{R}$ qui vérifie $f\left(c + \frac{T}{2}\right) = f(c)$.
-

11. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe dans $[0, 1]$.

12. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si f possède des limites finies en $-\infty$ et en $+\infty$, alors elle est bornée.

La réciproque est-elle vraie ?

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^3 + 3x - n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note u_n cette solution.
 2. Montrer que $0 \leq u_n \leq n^{\frac{1}{3}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left(\frac{u_n}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^3 = 1 - 3\frac{u_n}{n}$, et en déduire que $u_n \underset{+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{3}}$.
 4. Quelle est la limite de la suite ?
 5. (*) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
-

14. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ pour lequel :

$$\forall x, y \in [0, 1], \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

On dit alors que f est k -contractante (ou k -lipschitzienne).

1. Montrer en revenant aux définitions que f est continue sur $[0, 1]$.
 2. En déduire que f admet un point fixe dans $[0, 1]$, que l'on notera c .
 3. Montrer que si de plus $k < 1$, alors ce point fixe est unique.
 4. On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \in [0, 1]$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : |u_n - c| \leq k^n |u_0 - c|$.
 - (b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
-

15. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On définit une fonction f sur $]a, b[$ par $f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]a, b[$ sur un intervalle J à déterminer.
-

2. Que peut-on dire de l'application f^{-1} ?
3. Déterminer f^{-1} dans le cas $a = -1$ et $b = 1$, et vérifier qu'elle est bien continue.

16. Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
2. Étudier la fonction f .
3. On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
Déterminer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

17. Soit f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = xe^x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur un intervalle à préciser.
2. Déterminer le tableau de variations de f^{-1} .
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet un unique solution sur $[-1, +\infty[$, qu'on notera x_n .
4. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et déterminer sa limite.

18. Soit f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x^2}{x^2-1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. Montrer que f définit une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur $f(\mathcal{D}_f)$, ensembles à déterminer.
2. f^{-1} est-elle continue ?
3. Dresser le tableau de variations de f^{-1} .

19. Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x - e^x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de f et tracer l'allure de son graphe.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle à préciser, et dresser le tableau de variations de f^{-1} .
3. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $f(x) = -n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$, qu'on notera x_n .
4. Déterminer le sens de variations et la limite de la suite $(x_n)_{n \geq 2}$.
5. Montrer que $e^{x_n} \underset{+\infty}{\sim} n$.
6. (*) En déduire que $x_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

20. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0, qui vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = g\left(\frac{x}{2}\right)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
2. En déduire que g est constante sur $\mathbb{R}$.

21 (*). Soient $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$.
On suppose par l'absurde que $\forall x \in [0, 1], f(x) \neq g(x)$.

1. Montrer qu'on peut se ramener au cas où $f - g > 0$.
2. Justifier qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1], f(x) \geq g(x) + m$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1], f^n(x) \in [0, 1]$ et $g^n(x) \in [0, 1]$, où on a noté f^n la composée $f \circ f \circ \dots \circ f$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\forall x \in [0, 1], f^n(x) \geq g^n(x) + nm$.
Indication : Pour l'hérédité, on justifiera que $g^n(f(x)) = f(g^n(x))$
5. Conclure.