

# TD Ch 17 – Polynômes

## I. Opérations et degré

**1.** Soient  $P = X^2 + 3X$ ,  $Q = X^2 + X + 1$ ,  $R = X^3 - X$  et  $S = 1 - 2X$ . Calculer :

- |                |                |                    |                            |
|----------------|----------------|--------------------|----------------------------|
| a) $P^2$       | b) $P - Q$     | c) $3P + R - (QS)$ | d) $P^2 - Q^2$             |
| e) $P \circ S$ | f) $S \circ P$ | g) $P \circ Q$     | h) $P \circ R - R \circ P$ |

**2.** Trouver tous les couples  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  pour lesquels  $X^4 + sX^3 + tX^2 + 12X + 4$  est le carré d'un polynôme à coefficients réels.

**3.** Déterminer le degré et le coefficient des polynômes suivants.  $n$  désigne un entier naturel non nul, et  $P$  un polynôme de degré  $n$  et de coefficient dominant  $a_n \in \mathbb{R}^*$ .

- |                  |   |                            |
|------------------|---|----------------------------|
| a) $(X^4 + 1)^3$ | b) $(2X^2 - 3x + 4)^2 - (X^3 - 4X^2 + 1)$ | c) $(X + 1)^n - (X - 1)^n$ |
| d) $P^2 - P + 1$ | e) $P(X^2 + 1)$                           | f) $P(x + 1) - P$          |

**4.** Combien de polynômes vérifient les conditions suivantes ?

1.  $P^2 = X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 4X + 4$
2.  $P(3) = P(2) = 0$ ,  $P(-1) = 2$ ,
3.  $P(1) = 0$ ,  $P(-2) = 1$  et  $P(3) = 2$ , avec  $\deg(P) = 2$ ,
4.  $\deg(P) \leq 3$  et  $P(1) = 4$ ,  $P(-1) = 0$ ,  $P(-2) = -5$ ,  $P(2) = 15$ .
5.  $\deg(P) = 3$ ,  $P(1) = P'(1) = 1$  et  $P''(1) = P^{(3)}(1) = 12$ .

**5.** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  qui vérifie la relation  $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$ .

1. Déterminer le degré du polynôme  $P$ .
2. Trouver tous les polynômes qui vérifient la relation le l'énoncé.

**6.** Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que :

- |              |                           |                             |
|--------------|---------------------------|-----------------------------|
| a) $P = XP'$ | b) $(2X - 3)P'' - 6P = 0$ | c) $(2X^2 - 3)P'' - 6P = 0$ |
|--------------|---------------------------|-----------------------------|

**7.** On définit une suite de polynômes  $(P_n)$  par :  $P_0 = 1$ ,  $P_1 = X$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_{n+1} = 2XP_{n+1} + P_n$ .

1. Calculer  $P_2$  et  $P_3$ .
2. Soit  $n \geq 1$ . Déterminer le degré et le coefficient dominant de  $P_n$ .
3. Déterminer la parité du polynôme  $P_n$ .
4. Calculer  $P_n(1)$  en fonction de  $n$ , puis  $P_n(-1)$ .

**8.** Soient  $P = X^2 - X + 1$  et  $Q = X^3 - X$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit par récurrence un polynôme  $P_n$ , en posant :

$$\begin{cases} P_1 &= P \\ P_{n+1} &= XP_n(Q) + 2QP_n \end{cases}$$

1. Calculer  $P_2$ , et déterminer les degrés de  $P_2$  et  $P_3$ .
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $d_n = \deg(P_n)$ . Exprimer  $d_{n+1}$  en fonction de  $d_n$ .
3. En déduire le degré de  $P_n$  en fonction de  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**9.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. En dérivant de deux manières différentes le polynôme  $P = (1 + X)^n$ , montrer que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ .
  2. À l'aide du polynôme  $P = (1 + X)^n(1 + X)^n$ , montrer que  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$
  3. Montrer que  $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p}$
- 

## II. Racines et factorisation

**10.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Dans chaque cas, montrer qu'il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P = QD$ .

1.  $P = (X + 1)^{2n+1} - X^{2n+1} - 1$  et  $D = X^2 + X$
  2.  $P = (X + 1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$  et  $D = X(X + 1)(2X + 1)$
  3.  $P = (X - 2)^{2n} + (X - 1)^n - 1$  et  $D = X^2 - 3X + 2$
  4.  $P = X^{n+1} - X^n - X + 1$  et  $D = (X - 1)^2$ .
  5.  $P = nX^{n+2} - (n + 2)X^{n+1} + (n + 2)X - n$  et  $D = (X - 1)^3$
- 

- 11.**
- Trouver  $a \in \mathbb{R}$  tel que 1 soit racine multiple du polynôme  $P = X^5 - aX^2 - aX + 1$ .
  - Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Trouver les valeurs de  $a, b \in \mathbb{R}$  pour lesquels 1 est racine double de  $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$ .
- 

- 12.**
1. Montrer que 2 est racine de  $P = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$ , et déterminer son ordre de multiplicité.
  2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 10$ . Montrer que 1 est racine de  $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$ , et déterminer son ordre de multiplicité.
- 

**13.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ .

1. Montrer que  $P_n$  et  $P_{n+1}$  ne peuvent jamais avoir de racine en commun.
  2. En déduire que quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$  n'a pas de racine multiple.
- 

**14.** Trouver toutes les racines de  $P = 2X^3 + 5X^2 + X - 2$ , puis résoudre les équations suivantes :

- a)  $2 \sin^3(\theta) + 5 \sin^2(\theta) + \sin(\theta) - 2 = 0$
  - b)  $2e^{2t} + 5e^t = 2e^{-t} - 1$
- 

**15.** Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes suivants :

- a)  $X^3 - 19X + 30$
  - b)  $X^4 - 2X + 1$
  - c)  $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$
  - d)  $X^4 - X^2 + 1$
  - e)  $X^2 - 2 \cos(a)X + 1$  où  $a \in \mathbb{R}$
- 

**16.** Déterminer tous les polynômes tels que :

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = 0$
  2.  $\forall x \geq 0, P(x) = \cos(x)$
  3. (**Important :**) la fonction polynomiale associée à  $P$  est périodique.
  4.  $P(X + 1) = -P$
- 

**17.** Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  qui vérifient  $(X + 1)P(X) = XP(X + 1)$ .

On factorisera  $P$  à l'aide de racines simples.

---

### III. Approfondissements

**18** (Polynômes d'interpolation de Lagrange). Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  des réels deux à deux distincts.

Soient  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  des réels quelconques. L'objectif est de trouver un polynôme tel que pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $P(a_k) = b_k$ .

1. Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire de degré  $n - 1$  qui s'annule en  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n$ .
2. Montrer qu'il existe un unique polynôme  $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k\}$ ,  $L_k(a_i) = 0$ , et  $L_k(a_k) = 1$ . On explicitera l'expression de ce polynôme.
3. Répondre à la question posée dans l'énoncé, à l'aide d'une combinaison linéaire des polynômes  $L_k$ . Quel est le degré du polynôme  $P$  obtenu ?
4. Donner une expression très simple du polynôme  $\sum_{k=1}^n L_k$ .

---

**19** (Relations coefficients racines). Soient  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$  un polynôme scindé de degré 3, et  $x, y, z$  ses trois racines.

1. Exprimer les coefficients  $a, b, c, d$  en fonction des racines  $x, y, z$ .
2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les systèmes suivants. À chaque fois, on exprimera  $x, y, z$  comme les racines d'un certain polynôme qu'on résoudra.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ xyz = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{6} \end{cases}$$

---

**20** (Polynômes de Tchebychev). On considère la suite de polynômes définie par  $P_1 = 1$ ,  $P_2 = 2X$ , et pour tout  $n \geq 1$  :  $P_{n+1} = 2XP_{n+1} - P_n$ .

1. Calculer  $P_3$  et  $P_4$ .
2. Déterminer pour tout  $n \geq 1$  le degré et le coefficient dominant de  $p_n$ .
3. Soit  $\theta \in ]0, \pi[$ . Montrer par récurrence double que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\sin(n\theta) = \sin \theta P_n(\cos \theta)$ .
4. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Résoudre sur  $]0, \pi[$  l'équation  $\sin(nx) = 0$ .
5. Dédire des deux questions précédentes l'ensemble des racines de  $P_n$ , et en déduire sa factorisation.
6. En déduire que pour tout  $\theta \in ]0, \pi[$ , on a  $\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left( \cos(\theta) - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right)$ .