TD Ch 18 – Dérivation

I. Exercices théoriques

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in I$. Exprimer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{h}$ b) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+4h)-f(a+h)}{h}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$

---

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. Montrer que si f est paire, alors sa dérivée est impaire.
2. Que peut-on dire si f est impaire ?
3. Montrer que si f est périodique, alors sa dérivée l'est également.

---

3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On définit g sur $[0,1]$ par : $g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ f(2x-1) & \text{sinon} \end{cases}$.

À quelle condition la fonction g est-elle dérivable sur $[0,1]$?

II. Dérivabilité et calculs de dérivées

4. Sur quelle partie de $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes sont-elles continues ? dérivables ?

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$ b) $f(x) = x|x|$ c) $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$ d) $f(x) = x|x+1|$

---

5. Sur quelle partie de $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes sont-elles continues ? dérivables ?

a) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^{\frac{3}{2}}\ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} e^{x^2-3x+2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x - 1 - \frac{1}{\ln(x-2)} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

---

6. Pour chaque fonction, déterminer son ensemble de dérivabilité et calculer sa dérivée.

a) $f(x) = \dfrac{\arctan(x)}{x^2+1}$ b) $f(x) = x^x$ c) $f(x) = \dfrac{1}{(3x-2)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{(2+\cos(x))^4}$ e) $f(x) = \sqrt{1 - \ln(|x|)}$ f) $f(x) = (1+2x)^{x^2-3x}$

g) $f(x) = \ln\left(e - e^{-\frac{1}{x}}\right)$ h) $f(x) = \tan\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ i) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^x-1}{x^x+1}\right)$

---

7. Pour chaque fonction, donner le domaine de définition, prolonger par continuité lorsque c'est possible, puis étudier la dérivabilité et le caractère $\mathcal{C}^1$.

a) $f(x) = x^2\ln(x)$ b) $g(x) = \dfrac{x^2e^x}{1-e^{-3x}}$ c) $h(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

---

8. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit une fonction f_λ sur $\mathbb{R}$ par $f_\lambda(x) = \dfrac{x+\lambda}{x^2+1}$.

1. Montrer que les tangentes en 0 des fonctions f_λ sont toutes parallèles.
2. Montrer que les tangentes en 1 des fonctions f_λ sont concourantes.

---

9. Soit f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sqrt{\sin(x)} + x$.

1. Justifier que f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle à préciser.
2. Montrer que sa réciproque f^{-1} est continue et dérivable sur cet intervalle.

III. Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis

10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dont la dérivée ne s'annule pas. Montrer que f ne peut pas être périodique.

---

11. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

---

12. Soit $a > 0$, et $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = f'(0) = f(a) = 0$.
$g :]0, a] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0, et donner la valeur à donner à $g(0)$.
2. En déduire que g' s'annule au moins une fois sur $]0, a[$.
3. Montrer que la courbe de f admet une tangente passant par l'origine autre que celle en 0.

---

13. Établir les inégalités suivantes :

a) $\forall x > 1, \forall y > 1, \quad |\ln(1+\sqrt{x}) - \ln(1+\sqrt{y})| \leq \dfrac{|x-y|}{4}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\arctan(x)| \leq |x|$

c) $\forall x > 0, \quad \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $\forall x > 0, \quad \dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$

---

14. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $x^n + ax + b = 0$ a au plus 2 solutions réelles si n est pair, et au plus 3 solutions réelles si n est impair.

---

15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin(x) + 1$.

1. Montrer que f a un unique point fixe que l'on notera α.
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{|\alpha|}{2^n}$.
   (c) Conclure quant à la convergence de la suite.

---

16. Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^* \backslash \{\frac{1}{e}\}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x) + 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Ce prolongement est il dérivable ?
2. Étudier la fonction f et tracer l'allure de sa courbe représentative.
3. Déterminer les points fixes de f.
4. Étudier sur $\mathbb{R}^+$ la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$, et en déduire que $\forall x > 1, \quad 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.
5. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$.
   (a) Justifier que la suite est bien définie, et que $x_n > 1 \forall n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|x_{n+1} - 1| \leq \dfrac{|x_n - 1|}{4}$.
   (c) En déduire en justifiant soigneusement que la suite (x_n) converge vers une limite à préciser.

---

17. Soient $a > b$ deux réels, et $f, g \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$.
On suppose que $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, et $f^{(2)} \leq g^{(2)}$.
En étudiant la fonction $g - f$, montrer que $g \leq f$.

IV. Dérivées d'ordre supérieur

18. Soit f une fonction trois fois dérivable sur $]0,+\infty[$. On définit g et h sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = f(x^2)$ et $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
Exprimer en fonction de f et de ses dérivées les expressions de : $g', g'', g^{(3)}, h', h'', h^{(3)}$.

---

19. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x$.

1. Montrer que f admet une réciproque g dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Exprimer g' en fonction de g.
3. En déduire à l'aide d'une récurrence que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

---

20. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

1. Justifier que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f^{(n)}$ soit de la forme $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$.

---

21. On considère f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle de définition.
2. Calculer f', f'' et $f^{(3)}$.
3. Montrer par récurrence l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{(\cos(x))^{n+1}}$$

4. Donner une relation entre P_{n+1}, P_n et P_n'.
5. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
