

TD Ch 19 – Espaces vectoriels

I. Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Dans chacun des exercices ci-dessous, déterminer si les ensembles sont ou non des \mathbb{R} -espaces vectoriels.

1 (\mathbb{R}^2). Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 ?

- | | | | |
|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|-------------------|-------------------------------------|
| a) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ | b) $\{(0, 0)\}$ | c) \mathbb{R}^* | d) $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ |
| e) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid ab = 0\}$ | f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}$ | | |
| g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}$ | h) $\{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ | | |

2 (\mathbb{K}^n). Les ensembles suivants sont-ils des \mathbb{R} -espaces vectoriels ?

- | | |
|----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| a) $E = \{(x^2, y^2, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ | b) $E = \{(x, x + y, y - x) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ |
| c) $E = \{(x + 1, y - 1, x + y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ | d) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - y)^2 + (x + 2y + 3z)^2 = 0\}$ |
| e) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ ou } z = 0\}$ | f) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq y \leq z\}$ |

3 (Polynômes). Les ensembles suivants sont-ils des \mathbb{R} -espaces vectoriels ?

- | | |
|------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| a) $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P + P' + P'' = 0\}$ | b) $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid X^2 + 1 \text{ divise } P\}$ |
| c) $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = P(-1)\}$ | d) $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = a\}$
(discuter suivant a) |
| e) $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \geq 2 \text{ ou } P = 0\}$ | f) $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P' \text{ divise } P \text{ ou } P = 0\}$ |

4 (Fonctions réelles). Les ensembles suivants sont-ils des \mathbb{R} -espaces vectoriels ?

- | | |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $E = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid f'' + 2f' + 3f = 0\}$ | b) $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ affine}\}$ |
| c) $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ monotone}\}$ | d) $E = \left\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mid \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}\right\}$ |
| e) $E = \left\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)dt + f(0) = 0\right\}$ | |

5 (Suites réelles). Les ensembles suivants sont-ils des \mathbb{R} -espaces vectoriels ?

- | | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est arithmétique}\}$ | b) $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est géométrique}\}$ |
| c) $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente}\}$ | d) $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a\}$ |
| e) $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}\}$ | f) $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\} (a, b \in \mathbb{R})$ |

6 (Matrices). Les ensembles suivants sont-ils des \mathbb{R} -espaces vectoriels ?

- | | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| a) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + b = c - d\right\}$ | b) $GL_2(\mathbb{R})$ | c) $\mathcal{D}_4(\mathbb{R})$ |
| d) $F = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ | e) $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$, avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ fixée. | |

7 (Complexes). 1. L'ensemble $i\mathbb{R}$ des imaginaires purs est-il un \mathbb{R} -espace vectoriel ?

2. Est-il un \mathbb{C} -espace vectoriel ?

3. Les-ensembles suivants sont-ils des \mathbb{R} -espaces vectoriels ?

- | | | |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| a) $\{z \in \mathbb{C} \mid 2z + 5\bar{z} = 0\}$ | b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = 2\text{Ré}(z) - 1\}$ | c) $\{z \in \mathbb{C} \mid z + i = z - i \}$ |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|

II. Familles de vecteurs

8. Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. Dans \mathbb{R}^3 : (u, v, w) où $u = (9, -3, 7)$, $v = (1, 8, 8)$ et $w = (5, -5, 1)$.
 2. Dans \mathbb{R}^3 : (u, v, w) où $u = (1, 2, 3)$, $v = (-1, 0, 5)$ et $w = (-2, 2, -1)$.
 3. Dans \mathbb{R}^4 : (u, v) où $u = (1, 1, -2, 0)$, $v = (3, 1, -1, 2)$, $w = (6, -1, 3, 4)$ et $t = (-3, 0, 1, -1)$.
 4. Dans $\mathbb{R}[X]$: $(1, X(X-1), X^2(X+1), X(X-1)^2)$.
 5. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: $((u_n), (v_n), (w_n))$ où $u_n = 2^n$, $v_n = n$ et $w_n = (-1)^n$.
-

9. Soit $a \in \mathbf{R}$. $u = (a, 1, 1)$, $v = (1, a, 1)$ et $w = (1, 1, a)$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que (u, v, w) soit libre dans \mathbf{R}^3 .

10. On considère une famille (P_1, \dots, P_n) de polynômes réels tels que $0 \leq \deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_n)$.

1. On considère $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ tels que $\sum_{k=1}^n a_k P_k = 0$.

On considérant les degrés, montrer que $a_n = 0$.

2. En déduire par récurrence que la famille (P_1, \dots, P_n) est libre dans $\mathbb{R}[X]$.
-

11. Soient $e_1 = (1, 1, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 1)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 .

1. Montrer que (e_1, e_2) est une famille libre de \mathbb{R}^3 .
 2. Déterminer a pour que le vecteur de coordonnées $(2, 1, a)$ appartienne au sous espace engendré par e_1 et e_2 .
-

12. Soient $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, -1, 2)$ et $w = (1, -2, 3)$ trois vecteurs de \mathbb{R}^3 .

1. Montrer que (u, v, w) est une famille liée.
 2. Soit F le sous espace vectoriel engendré par (u, v, w) . Donner une base de F .
 3. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$. Montrer que G est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , et déterminer une base de G .
 4. Montrer que $u, v, w \in G$, et en déduire que $F = G$.
-

13. 1. On considère les vecteurs $u = (-4, 4, 3)$, $v = (-3, 2, 1)$, $s = (-1, 2, 2)$ et $t = (-1, 6, 7)$ dans \mathbb{K}^3 . Montrer que $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(s, t)$.

2. On considère les vecteurs $u = (1, 2, -1)$, $v = (3, -1, 2)$, $s = (1, 3, -1)$ et $t = (2, -2, 3)$ dans \mathbb{K}^3 . Déterminer une base de $\text{Vect}(u, v) \cap \text{Vect}(s, t)$.
-

14. Déterminer l'intersection des deux sous espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 défini par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}((1, 0, 1), (2, 1, 1))$$

15. On considère les trois ensembles suivants :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + 2y - 3z = 0\}, \quad F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\} \quad \text{et} \\ G = \{(a - b, a + b, 2a - 3b) \in \mathbb{R}^3 \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1. Montrer que ce sont trois sous espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 et donner une base de chacun de ces espaces vectoriels.
 2. Est-ce que les ensembles $E \cap F$, $F \cap G$ et $G \cap E$ sont des espaces vectoriels ? Si oui en donner une base.
-

16. Dans \mathbb{R}^4 on considère $F = \text{Vect}((1, 9, 4, -1), (-1, -5, 0, 1))$ et $G = \text{Vect}((-1, -1, 4, 1), (0, 4, 4, 0))$.

1. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Donner une condition nécessaire et suffisante (portant sur x, y, z, t) pour qu'on ait $u \in F$ (équation cartésienne de F).
 2. En déduire que les deux vecteurs engendrant G sont dans F . Que peut-on en déduire ?
-

17. On considère les sous ensembles de \mathbb{C}^3 suivants :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / x + iy - z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(u + iv, u - iv, u + v) / (u, v) \in \mathbb{C}^2\}$$

1. Montrer que F et G sont des espaces vectoriels et en donner une base.
 2. Donner une équation cartésienne de G , c'est à dire déterminer à quelle(s) condition(s) un vecteur $u = (x, y, z)$ est un élément de G .
 3. Montrer que $H = F \cap G$ est un espace vectoriel et en donner une base ainsi que sa dimension.
 4. Quelle est la dimension de \mathbb{C}^3 ? Construire une base de \mathbb{C}^3 avec des vecteurs de H, G et F .
-

18. On définit $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ par :

$$f_1(x) = \ln(x), \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = e^x, \quad f_4(x) = e^{x+3}, \quad f_5(x) = \frac{1}{x}.$$

1. La famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ est-elle libre ?
 2. En considérant les équivalents en $+\infty$ d'une combinaison linéaire, montrer que (f_1, f_2, f_3, f_5) est libre.
 3. Par le même raisonnement, donner la dimension de $G = \text{Vect}(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5)$ où :
 $g_1(x) = 2x^2, g_2(x) = e^2x, g_3(x) = 1, g_4(x) = x^2 + 3$ et $g_5(x) = e^x - 1$.
-

III. Dimension et rang

19. On considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 . Soit $u = (1, 1)$ et $v = (1, 2)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^2 .

1. Montrer que (u, v) est une base de \mathbb{R}^2 .
 2. Calculer les coordonnées de $w = (3, 4)$ dans la base (u, v) .
-

20. La famille (u, v, w) est-elle libre, où $u = (1, 1, 2), v = (2, 0, 1), w = (6, 2, 3)$?

Est-ce une base de \mathbb{R}^3 ?

21. Soient $u = (1, 2, 3), v = (0, 2, 0), w = (1, 0, 0)$ et $s = (-1, 2, -1)$ des vecteurs de \mathbb{R}^3 .

1. Montrer que la famille (u, v, w, s) est liée et est génératrice de \mathbb{R}^3 .
 2. En extraire une base de \mathbb{R}^3 .
-

22. Soit E un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . On définit :

$$\begin{cases} u_1 = e_1 - e_2 + e_3 \\ u_2 = e_1 - 2e_3 \\ u_3 = 2e_1 - e_2 + e_3 \end{cases}$$

1. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de E .
 2. Déterminer les coordonnées de e_1, e_2 et e_3 dans cette nouvelle base.
-

23. Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, en donner une base et déterminer leur dimension.

- a) $\{(x + y, x, y, 2x - 3y) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ b) $\{(a + b, a - b, 2a + 3b, 5b - a) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + 2y - 3z = 0\}$ d) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a - 5b = 0 \text{ et } b + 4c = 0\}$
e) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 5x - y - 2z + 3t = 0\}$ f) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{R}^4 \mid u = t \text{ et } v = w\}$
g) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 2z = 0 \text{ et } y = t\}$ h) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 4y + 2z = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}$
i) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x + 3y + 2z - t = 0 \text{ et } x + y = z + t \text{ et } x + y + 3t = 0\}$
j) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - 2z + t = 0 \text{ et } x + y + 4z - t = 0 \text{ et } x = -z\}$
-

24. Soient $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y\}$.

- Vérifier que E et F sont deux sous espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 , et déterminer leur dimension.
 - Montrer que $E \cap F$ est de dimension 2 et en déterminer une base $\mathcal{B} = (u, v)$.
 - Compléter \mathcal{B} en une base (u, v, w) de E .
 - Compléter \mathcal{B} en une base (u, v, w') de F .
 - Montrer que (u, v, w, w') est une base de \mathbb{R}^4 .
-

25. Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes :

- a) $((1, 4, -3), (-2, -8, 6))$ b) $((1, 3, -3), (4, 2, -3), (-1, 7, 6))$
c) $((1, 1, -2), (2, 1, -3), (0, 1, -1))$ d) $((1, 1, 2), (2, 0, 1), (3, 3, 6), (3, 1, 3))$
e) $((1, 0, 1, 2), (0, 0, 0, 2), (2, 1, 3, -1), (1, -2, -1, 4))$ f) $(X + 1, X - 1, X^2 - X, 2X^2 + X + 1)$
-

26. Montrer que les ensembles suivants sont de espaces vectoriels de dimension finie, et en déterminer la dimension et une base.

- a) $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$ b) $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1)\}$
c) $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P''(1) = P(1)\}$ d) $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}$
-

27. 1. Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel et l'écrire comme un $\text{Vect}(u, v)$, avec $u, v \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- En déduire une base de F ainsi que sa dimension.
 - Avec la même méthode, déterminer une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une base de l'ensemble $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
-

28. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$. Montrer que (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
