TD Ch 2 – Trigonométrie

1. Calculer le cosinus, le sinus et la tangente des angles suivants : $\frac{\pi}{8}$; $\frac{3\pi}{8}$; $\frac{7\pi}{8}$.

---

2. Calculer le cosinus, le sinus et la tangente des angles suivants : $\frac{\pi}{12}$; $-\frac{5\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{12}$.

---

3 ((Dé)linéarisation).

1. (a) Rappeler les formules pour $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$, et en déduire les formules pour $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ (démonstration demandée).
   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ et $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.
2. (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.
   On écrira $\cos(3x) = \cos(2x + x)$.
   (b) En déduire une expression de $\cos^3(x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\cos(3x)$.
   (c) De la même manière, démontrer que $\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$, et en déduire une expression de $\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(3x)$ et $\sin(x)$.
3. Dans les questions précédentes, on dit qu'on a "linéarisé" $\cos^3(x)$ et $\sin^3(x)$, c'est-à-dire qu'on les a exprimé comme somme de termes de la forme $\cos(ax)$ ou $\sin(ax)$.
   De la même manière, linéariser $\cos^4(x)$ puis $cos^5(x)$.

---

4. Résoudre sur $\mathbb{R}$, puis sur $]-\pi;\pi]$ les équations et inéquations suivantes. Placer les solutions sur le cercle trigonométrique.

a) $3\sin(3x) = -4$ b) $|\sin(2x)| = \frac{1}{2}$ c) $2\cos(x) < \sqrt{2}$ d) (*) $1 < \tan(5x) \leq \sqrt{3}$

---

5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes et placer les solutions sur le cercle trigonométrique. On donnera les solutions sous forme de congruences.

a) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ b) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ c) $\tan\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x + \frac{4\pi}{5}\right)$

d) $2\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ e) $\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ f) $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

---

6. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1+\cos(x)}{\sin(x)}$, et factoriser au maximum l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.
On utilisera une formule faisant apparaître $1 + \cos(2a)$.

---

7. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation $2\sin(x) - 1 < \sqrt{1 - 4\cos^2(x)}$

---

8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $\sin(x) + \cos(x) + 1 = 0$ b) $-\sqrt{2}\cos(x) + \sqrt{2}\sin(x) = 1$

c) $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = -\sqrt{2}$ d) $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) < \sqrt{3}$

9.

1. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a : $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$.
2. En déduire que pour tous $p, q \in \mathbb{R}$, on a : $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

3. Appliquer cette formule pour obtenir une factorisation des expressions suivantes, où $x \in \mathbb{R}$:

   a) $\cos(x) + \cos(3x)$ b) $\cos(4x) + \cos(10x)$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   a) $3\cos(5x) = \cos(2x) + \cos(12x)$ b) $\cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) = 0$

5. Sur le même modèle que les questions 1 et 2, obtenir une formule pour $\sin(p) + \sin(q)$, puis en déduire l'ensemble des solutions de l'équation $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

---

10. Résoudre dans $[0, 2\pi]$ les équations et inéquations suivantes :

a) $2\sin^2(x) + \cos(x) - 1 \geq 0$ b) $\sin^2(x) + 3\cos(x) - 1 = 0$

c) $\tan^2(x) - \dfrac{4}{\sqrt{3}}\tan(x) + 1 < 0$ d) $4\cos^3(x) - 3\cos(x) = 4\sin^2(x) - 1$

e) $\cos(2x) - \cos(4x) < 0$ f) $2\sin(x)\tan(x) - 3 < 0$

---

11. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f dans les cas suivants :

a) $f : x \mapsto \dfrac{\sin(3x)}{1 + \cos(x)}$ b) $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x) - 2\sin(x) - 3}$ c) $f : x \mapsto \sqrt{\cos^2(x) - \cos(x)}$

d) $f : x \mapsto \ln(2 + \cos^3(x))$ e) $f : x \mapsto \sqrt{x - \sin(x)}$ f) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin(3x)} - \dfrac{\tan(x/2)}{1 - \sin^3(x)}$

---

12. (*) Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $a \in]0; 2\pi[$, on a l'égalité :

$$\cos\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{4}\right)\ldots\cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right)}$$

On appliquera l'hypothèse de récurrence à $\dfrac{a}{2}$.
