TD Ch 2 – Trigonométrie
Corrigé

1. **Méthode :** On calcule $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ en utilisant la formule de trigonométrie : $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$, et tout le reste en découlera !

1. Commençons par remarquer que comme $\frac{\pi}{8} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \sin\left(\frac{\pi}{8}\right), \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \in \mathbb{R}_+^*$.

   On a : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$, donc : $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$.

   Ainsi : $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}+2}{4}$.

   Comme $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$, on a alors : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}} = \dfrac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$.

   Ensuite, comme $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$, on a : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}$.

   Ainsi : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{1 - \dfrac{\sqrt{2}+2}{4}} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

   Et donc finalement : $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$.

   Simplification : $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\dfrac{(2-\sqrt{2})^2}{4-2}} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

2. $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

   De même, $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$, puis $\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$.

3. Enfin, en utilisant que $\dfrac{7\pi}{8} = \pi - \dfrac{\pi}{8}$, on obtient :

   $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{-2-\sqrt{2}}}{2}$, $\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, et $\tan\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1-\sqrt{2}$.

---

2. La méthode est exactement la même qu'à l'exercice précédent.

1. $2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$, donc :

   $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2}} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}} = \dfrac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$.

   Puis $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$, donc $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

   Enfin, $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}$.

2. On utilise que $-\dfrac{5\pi}{12} = -\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{12}\right)$ pour obtenir :

   $\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, $\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$,

   et $\tan\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{-1}{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{3}-2} = -2-\sqrt{3}$.

3. De même, en utilisant que $\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{12}$:

   $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -2-\sqrt{3}$.

3 ((Dé)linéarisation). 1. (a) On a, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.
En appliquant ces formules à $a = b = x$, on obtient, pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque :
$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, et :
$\sin(2x) = \sin(x+x) = \cos(x)\sin(x) + \sin(x)\cos(x) = 2\cos(x)\sin(x)$.

(b) En remplaçant $\sin^2(x)$ par $1 - \cos^2(x)$, on a obtenu que $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. Ainsi : $\boxed{\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}}$.
De même, en remplaçant $\cos^2(x)$ par $1 - \sin^2(x)$, on a obtenu que $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$, et donc $\boxed{\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}}$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$\cos(3x) = \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) = (2\cos^2(x) - 1)\cos(x) - 2\cos(x)\sin(x)\sin(x)$.
En remplaçant $\sin(x)\sin(x)$ par $1 - \cos^2(x)$ et en développant, on obtient :
$\cos(3x) = 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x) + 2\cos^3(x)$ $\boxed{= 4\cos^3(x) - 3\cos(x)}$.

(b) On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$: box$\$ \cos^3(x) = \dfrac{\cos(3x) + 3\cos(x)}{4}$.

(c) De même : $\sin(2x+x) = \cos(2x)\sin(x) + \sin(2x)\cos(x) = (1 - 2\sin^2(x))\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x)\cos(x)$.
En remplaçant $\cos(x)\cos(x)$ par $1 - \sin^2(x)$:
$\sin(3x) = \sin(x) - 2\sin^3(x) + 2\sin(x) - 2\sin^3(x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$.
On en déduit que $\boxed{\sin^3(x) = \dfrac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4}}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On commence par calculer $\cos(4x)$.
On a $\cos(4x) = \cos(2 \times 2x) = 2\cos(2x)^2 - 1 = 2\left(2\cos^2(x) - 1\right)^2 - 1$.
En développant, on obtient $\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$.
Ainsi, on a $\cos^4(x) = \dfrac{\cos(4x) + 8\cos^2(x) - 1}{8}$.
En remplaçant $\cos^2(x)$ par la formule obtenue à la question $1a$, on obtient :
$\boxed{\cos^4(x) = \dfrac{\cos(4x) + 4 + 4\cos(2x) - 1}{8} = \dfrac{\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3}{8}}$.

---

4. Il est essentiel d'utiliser le cercle trigonométrique !

a) On a $3\sin(3x) = -4 \iff \sin(3x) = -\dfrac{4}{3}$. Or $-\dfrac{4}{3} \notin [-1, 1]$, donc cette équation n'admet pas de solution ! $\boxed{\mathcal{S} = \varnothing}$.

b) $|\sin(2x)| = \dfrac{1}{2} \iff \sin(2x) = \pm\dfrac{1}{2}$.
Or $\sin(2x) = \dfrac{1}{2} \iff \left(2x \equiv \dfrac{\pi}{6}\ \text{ou}\ 2x \equiv \dfrac{5\pi}{6}\,[2\pi]\right) \iff \left(x \equiv \dfrac{\pi}{12}\,[\pi]\ \text{ou}\ x \equiv \dfrac{5\pi}{12}\,[\pi]\right)$.
De même : $\sin(2x) = -\dfrac{1}{2} \iff \left(x \equiv -\dfrac{\pi}{12}\,[\pi]\ \text{ou}\ x \equiv -\dfrac{5\pi}{12}\,[\pi]\right)$.
Ainsi, $\boxed{|\sin(2x)| = \dfrac{1}{2} \iff x \equiv \left(\pm\dfrac{\pi}{12}\ \text{ou}\ \pm\dfrac{5\pi}{12}\right)[\pi]}$.
Les solutions dans $]-\pi, \pi]$ sont donc données par : $\boxed{\mathcal{S} = \{\dfrac{-11\pi}{12}, \dfrac{-7\pi}{12}, \dfrac{-5\pi}{12}, \dfrac{-\pi}{12}, \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}, \dfrac{7\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}\}}$.

c) $2\cos(x) < \sqrt{2} \iff \cos(x) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Le cercle trigonométrique donne les solutions :

- Dans $]-\pi, \pi]$, $\boxed{\mathcal{S} =]-\pi, -\frac{\pi}{4}[\ \cup \ ]\frac{\pi}{4}, \pi]}$.
- Dans $\mathbb{R}$, $\boxed{\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ , \ \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right[}$.

d) (*) D'après le cercle trigonométrique, cette inéquation est équivalente à avoir :
$5x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\frac{\pi}{4} + k\pi \ , \ \frac{\pi}{3} + k\pi]$, c'est-à-dire :$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{5} \ , \ \frac{\pi}{15} + k\frac{\pi}{5}]$.
Dans $]-\pi, \pi]$, on a donc $\mathcal{S} = \bigcup_{k=-5^4}]\frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{5} \ , \ \frac{\pi}{15} + k\frac{\pi}{5}]$.

5.

a) $\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) \iff 3x - \dfrac{\pi}{4} \equiv \pm\dfrac{\pi}{8}[2\pi] \iff 3x \equiv \left(\dfrac{\pi}{8} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{8}\right)[2\pi]$
On obtient : $\boxed{x \equiv \left(\dfrac{\pi}{24} \text{ ou } \dfrac{\pi}{8}\right)\left[\dfrac{2\pi}{3}\right]}$.

b) $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) \iff \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - (2x - \frac{\pi}{4})\right) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) \iff \dfrac{3\pi}{4} - 2x \equiv \pm\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)[2\pi]$.
On obtient $3x \equiv \dfrac{7\pi}{12}[2\pi]$ ou $x \equiv \dfrac{11\pi}{12}[2\pi]$
Ainsi : $\boxed{\left(x \equiv \dfrac{7\pi}{36}\left[\dfrac{2\pi}{3}\right]\right) \text{ ou } \left(x \equiv \dfrac{11\pi}{12}[2\pi]\right)}$.

c) $\tan\left(3x - \dfrac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x + \dfrac{4\pi}{5}\right) \iff 3x - \dfrac{\pi}{5} \equiv x + \dfrac{4\pi}{5}[\pi] \iff 2x \equiv \pi[\pi]$
On obvient donc $x \equiv \dfrac{\pi}{2}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$, c'est-à-dire $\boxed{x \equiv 0\left[\dfrac{\pi}{2}\right]}$.

d) $2\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} \iff 2\tan^2(x) = 1 + \tan^2(x) \iff \tan^2(x) = 1 \iff \tan(x) = \pm 1$.
On obtient donc $x \equiv \pm\dfrac{\pi}{4}[\pi]$, c'est-à-dire $\boxed{x \equiv \dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]}$.

e) $\sin^2\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \iff \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \iff \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right) = \pm\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.
Or $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \iff \dfrac{\pi}{3} - 2x \equiv \pm\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)[2\pi] \iff (3x \equiv 0[2\pi]) \text{ ou } \left(x \equiv \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]\right)$.
D'autre part, $-\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right)$, donc
$\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right) = -\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \iff \dfrac{\pi}{3} - 2x \equiv \pm\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right)[2\pi] \iff \left(x \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]\right) \text{ ou } (3x \equiv \pi[2\pi])$.
En conclusion, on a : $\boxed{\left(x \equiv 0\left[\dfrac{2\pi}{3}\right]\right) \text{ ou } \left(x \equiv \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]\right) \text{ ou } \left(x \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]\right) \text{ ou } \left(x \equiv \dfrac{\pi}{3}\left[\dfrac{2\pi}{3}\right]\right)}$.
Ceci se simplifie en : $\boxed{x \equiv 0\left[\dfrac{\pi}{3}\right]}$!

f) $2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.
On a donc $2x + \dfrac{\pi}{3} \equiv \pm\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$, et donc $2x \equiv \left(\dfrac{-\pi}{6} \text{ ou } \dfrac{-\pi}{2}\right)[2\pi]$.
Ainsi : $\boxed{x \equiv \left(-\dfrac{\pi}{12} \text{ ou } -\dfrac{\pi}{4}\right)[\pi]}$.

6. f est définie si et seulement si $\sin(x) \neq 0$. Or $\sin(x) = 0 \iff x \equiv 0[\pi]$. Ainsi, le domaine de définition de f est $\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R} \backslash \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi, (k+1)\pi[}$.

Pour $x \in \mathcal{D}$, on a : $f(x) = \dfrac{1+\cos\left(2\frac{x}{2}\right)}{\sin(x)} = \boxed{\dfrac{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin(x)}}$.

7.

- Domaine d'existence : on a $1 - 4\cos^2(x) \geq 0 \iff \cos^2(x) \leq \dfrac{1}{4} \iff -\dfrac{1}{2} \leq \cos(x) \leq \dfrac{1}{2}$.
  Sur $[-\pi, \pi]$, le domaine d'existence de l'inéquation est donc $\mathcal{D} = \left[-\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$.
- On procède ensuite par disjonction de cas en fonction du signe de $2\sin(x) - 1$. On a :
  $2\sin(x) - 1 \geq 0 \iff \sin(x) \geq \dfrac{1}{2}$. Sur le domaine $\mathcal{D}$, on a : $2\sin(x) - 1 \geq 0 \iff x \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$.
- Cas 1 : $x \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$. Dans ce cas, on peut élever au carré des deux côtés, et on a alors :
  $4\sin^2(x) - 4\sin(x) + 1 < 1 - 4\cos^2(x) \iff 4\left(\sin^2(x) + \cos^2(x)\right) < 4\sin(x) \iff 1 < \sin(x)$.
  Ce n'est jamais vrai ! On a donc $\mathcal{S}_1 = \varnothing$.
- Cas 2 : $x \in \left[-\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3}\right]$. Dans ce cas, l'inéquation est toujours vraie, puisqu'une racine carrée est toujours supérieure à un nombre strictement négatif ! Ainsi : $\mathcal{S}_2 = \left[-\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3}\right]$.
- En conclusion : on a comme ensemble de solutions : $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \boxed{= \left[-\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3}\right]}$.

---

8. **Attention à la rédaction !**

a) On cherche $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) + \cos(x) = r\cos(x + \varphi)$.
On sait que $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, et $\cos(\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et $\sin(\varphi) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Ainsi, $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$ convient. L'équation se réécrit donc :
$\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \iff \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) \iff x - \dfrac{\pi}{4} \equiv \pm\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$.
Ainsi, on trouve : $\boxed{\left(x \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\right) \text{ ou } (x \equiv \pi[2\pi])}$.

b) On cherche $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\sqrt{2}$
$cos(x) + \sqrt{2}\sin(x) = r\cos(x + \varphi)$. On sait que :
$r = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{4} = 2$, et $\cos(\varphi) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$, et $\sin(\varphi) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Ainsi, $\varphi = -\dfrac{3\pi}{4}$ convient. L'équation se réécrit donc :
$2\cos\left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right) = 1 \iff \cos\left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.
On obtient : $x \equiv \dfrac{3\pi}{4} \pm \dfrac{\pi}{3}$, c'est-à-dire :
$\boxed{x \equiv \left(\dfrac{-13\pi}{12} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{12}\right)[2\pi]}$.

c) **La rédaction est la même**, on ne la détaille pas dans la suite. On obtient $2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{2}$,
et donc par congruences : $\boxed{x \equiv \left(\dfrac{-13\pi}{24} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{24}\right)[\pi]}$.

d) L'équation se réécrit : $2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) < \sqrt{3}$, c'est-à-dire $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Ceci équivaut à $x-\frac{\pi}{3} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{3}+k\pi, \frac{2\pi}{3}+k\pi\right[$, et donc on a : $\boxed{\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{2\pi}{3}+k\pi, \pi+k\pi\right[}$.

---

9. 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, donc :
$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$

2. Soient $p, q \in \mathbb{R}$.
On applique la question précédente à $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$. On a alors $a+b = p$ et $a-b = q$, d'où :
$\cos(a+b) + \cos(a-b) = \cos(p) + \cos(q) = 2\cos(a)\cos(b) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

3. Soient $x \in \mathbb{R}$.

   a) Avec $p = x$ et $q = 3x$, on a :
   $\cos(x) + \cos(3x) = 2\cos\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right) = 2\cos(2x)\cos(-x) = 2\cos(x)\cos(2x)$.

   b) Avec $p = 4x$ et $q = 10x$: $\cos(4x) + \cos(10x) = 2\cos(7x)\cos(-3x) = 2\cos(3x)\cos(7x)$.

4. On applique de nouveau la factorisation de la question 2.

   a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(2x) + \cos(12x) = 2\cos(7x)\cos(-5x) = 2\cos(5x)\cos(7x)$, donc l'équation devient :
   $\cos(5x)\,(3 - 2\cos(7x)) = 0 \iff \left(\cos(5x) = 0 \text{ ou } \cos(7x) = \frac{3}{2}\right) \iff \cos(5x) = 0$ puisque $\frac{3}{2} \notin [-1, 1]$.
   Ainsi, on obtient $\boxed{x \equiv \frac{\pi}{10}\left[\frac{\pi}{5}\right]}$.

   b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(2x) + \cos(4x) = 2\cos(3x)\cos(x)$, et donc l'équation devient :
   $\cos(3x)\,(1 + 2\cos(x)) = 0 \iff \left(\cos(3x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = -\frac{1}{2}\right)$
   Ainsi : $\boxed{x \equiv \frac{\pi}{6}\left[\frac{\pi}{3}\right] \text{ ou } x \equiv \pm\frac{2\pi}{3}[2\pi]}$.

---

10. Il s'agit la plupart du temps de se ramener à une équation de degré 2, éventuellement avec un changement de variable.

a) $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, donc l'inéquation devient $2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 \leq 0$.
Avec le changement de variable $y = \cos(x)$, on doit résoudre l'inéquation $2y^2 - y - 1 \leq 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 9 > 0$, donc il a deux racines réelles, données par $\frac{1 \pm 3}{4}$, c'est-à-dire 1 et $-\frac{1}{2}$.
Le trinôme a un coefficient dominant strictement positif, donc on a $2y^2 - y - 1 \leq 0 \iff y \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.
On a donc $2\sin^2(x) + \cos(x) - 1 \geq 0 \iff \cos(x) \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.
Finalement : $\boxed{\mathcal{S} = \left[0, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]}$.

b) De même, l'équation devient $\cos^2(x) - 3\cos(x) = 0 \iff \cos(x)\,(\cos(x) - 3) = 0 \iff \cos(x) = 0$ puisqu'on ne peut pas avoir $\cos(x) = 3$.
Ainsi : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}}$.

c) Le domaine est ici $[0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

Avec le changement de variable $y = \tan(x)$, on doit résoudre $y^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}y + 1 < 0$. On obtient que ce trinôme a deux racines réelles : $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\sqrt{3}$. Ainsi, on a $\tan(x) \in \left]\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right[$, et donc :

$\boxed{\mathcal{S} = \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right[}$.

d) Avec $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ puis le changement de variable $y = \cos(x)$, l'équation devient $4y^3 + 4y^2 - 3y - 3 = 0$.
-1 est racine évidente de ce polynôme, et on a :
$4y^3 + 4y^2 - 3y - 3 = (y+1)(4y^2 - 3) = 4(y+1)\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Finalement, l'équation devient $\cos(x) \in \left\{-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, c'est-à-dire :

$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}}$.

e) On écrit $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1$. Ensuite, avec le changement de variable $y = \cos(2x)$, l'équation devient $2y^2 - y - 1 > 0$.
Les racines de ce trinôme sont -1 et 2, donc on obtient :
$\cos(2x) \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$. C'est impossible ! Ainsi : $\boxed{\mathcal{S} = \varnothing}$.

f) Avec la définition de tan, l'équation se réécrit $\frac{2\sin^2(x)}{\cos(x)} - 3 < 0$, c'est-à-dire $\frac{2 - 2\cos^2(x)}{\cos(x)} - 3 < 0$, ou encore :
$\frac{2\cos^2(x) + 3\cos(x) - 2}{\cos(x)} > 0$. Avec le changement de variable $y = \cos(x)$, on réalise le tableau de signe de $\frac{2y^2 + 3y - 2}{y} = \frac{(y+2)(2y-1)}{y}$.

On obtient : $y \in]-2, 0[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, c'est-à-dire $\cos(x) \in [-1, 0[\cup \left]\frac{1}{2}, 1\right]$ puisque cos est à valeurs dans $[-1, 1]$.

Finalement, on en déduit : $\boxed{\mathcal{S} = \left[0, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]}$.

---

11. Il s'agit de résoudre des équations ou inéquations pour déterminer le domaine de définition dans chaque cas.

a) On résout l'équation $1 + \cos(x) = 0$, c'est-à-dire $\cos(x) = -1$. On obtient comme domaine de définition : $\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}$.

b) On résout l'équation $\sin^2(x) - 2\sin(x) - 3 = 0$, à l'aide du changement de variable $y = \sin(x)$.
On obtient $y = -1$ ou $y = 3$, c'est-à-dire $\sin(x) = -1$ puisqu'on ne peut jamais avoir $\sin(x) = 3$.
Ainsi, les "valeurs interdites" sont les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sin(x) = -1$, c'est-à-dire $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Le domaine de définition de f est donc $\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

c) On doit avoir $\cos^2(x) - \cos(x) \geq 0$, c'est-à-dire $\cos(x)\,(\cos(x) - 1) \geq 0$, et donc $\cos(x) \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$.
Comme cos est à valeurs dans $[-1, 1]$, ceci devient $\cos(x) \in [-1, 0] \cup \{1\}$.

Le domaine de définition est donc $\boxed{\mathcal{D} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]}$.

d) On doit résoudre $\cos^3(x) + 2 > 0$, c'est-à-dire $\cos^3(x) > -2$.
Par stricte croissance de la fonction cube, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos^3(x) \geq (-1)^3 = -1 > -2$. Ainsi, cette inéquation est toujours vraie !
La fonction est donc définie sur $\boxed{\mathbb{R} \text{ tout entier}}$.

e) On doit résoudre $x - \sin(x) \geq 0$, et on le fait par une étude de fonction ! Nous l'avons déjà fait dans le TD précédent ! L'ensemble de solutions est $\mathbb{R}_+$, et donc : $\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}_+}$.

f) Les valeurs interdites sont les $x \in \mathbb{R}$ telles que $\sin(3x) = 0$ **ou** $\sin^3(x) = 1$ **ou** $\tan(x/2)$ n'est pas défini.
La première équation donne $x \equiv 0\left[\frac{\pi}{3}\right]$, et la seconde donne $\sin(x) = 1$, c'est-à-dire $x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Enfin, pour la tangente, on obtient $x \equiv \pi[2\pi]$.
Le plus simple est de représenter les valeurs interdites sur le cercle trigonométrique ! On peut cependant écrire :
$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R} \backslash \left(\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ k\frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \right)}.$$

---

12. (*) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, je note P_n la propriété suivante :
"$\forall a \in]0, 2\pi[,\ \cos\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{4}\right)\ldots\cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \dfrac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$".

- **Initialisation ($n = 1$).** Soit $a \in]0, 2\pi[$. Pour $n = 1$, le membre de gauche est simplement $\cos\left(\frac{a}{2}\right)$, et le membre de droite $\dfrac{\sin(a)}{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)}$.
  Or $2\cos\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{a}{2}\right) = \sin\left(2 \times \frac{a}{2}\right) = \sin(a)$, donc en divisant par $\sin\left(\frac{a}{2}\right) \neq 0$, on a bien :
  $\cos\left(\frac{a}{2}\right) = \dfrac{\sin(a)}{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)}$, et ce pour tout $a \in \mathbb{R}$: P_1 est bien vraie.
- **Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.** Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est encore vraie.
  Soit $a \in]0, 2\pi[$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à $\dfrac{a}{2} \in]0, \pi[\subset]0, 2\pi[$, on sait que :
  $$\cos\left(\tfrac{a}{4}\right)\cos\left(\tfrac{a}{8}\right)\ldots\cos\left(\tfrac{a}{2^{n+1}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)}.$$
  Ainsi, en multipliant les deux membres de l'égalité par $\cos\left(\frac{a}{2}\right)$, on a :
  $$\cos\left(\tfrac{a}{2}\right)\cos\left(\tfrac{a}{4}\right)\ldots\cos\left(\tfrac{a}{2^{n+1}}\right) = \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)} = \frac{\sin\left(2 \times \frac{a}{2}\right)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)}.$$
  On a bien obtenu : $\cos\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{4}\right)\ldots\cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)}$, et ce pour tout $a \in]0, 2\pi[$, donc P_{n+1} est vraie !
- **Conclusion.** Par principe de récurrence, on a bien montré que :
  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in]0, 2\pi[,\ \cos\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{4}\right)\ldots\cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \dfrac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$.
