TD Ch 20 – Probabilités finies

I. Généralités

1. Soit A, B, C trois évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Exprimer en fonction de A, B et C les évènements suivants :

a) L'un au moins des événements se réalise

b) Exactement un des événement se réalise

c) Au moins deux des événements se réalisent

d) Exactement deux des événements se réalisent

e) Aucun des événements ne se réalise

f) Au plus deux des événements se réalisent

---

2. On étudie 4 sortes de maïs numérotées de 1 à 4 et on note M_i l'événement : « le maïs numéro i est transgénique ». Écrire à l'aide de ces événements les événements suivants :

a) A : « une seule sorte de maïs est transgénique » ;

b) B : « au moins une des trois premières sortes de maïs n'est pas transgénique ».

---

3. Dans une population, 45% des individus sont vaccinés contre la fièvre jaune, 60% sont vaccinés contre la diphtérie et 30% contre les 2 maladies.
Quelle est la probabilité qu'un individu choisi au hasard ne soit vacciné contre aucune de ces deux maladies ?

---

4. Un appareil fabriqué en très grande série peut être défectueux à cause de deux défauts notés A et B. On estime que 2% des pièces présentent les deux défauts, 5% ont le défaut A mais pas le défaut B et 10% ont le défaut B.
Quelle est la probabilité pour qu'une pièce présente le défaut A ? Aucun défaut ? Un seul défaut ?

---

5. Soit $\Omega = [\![1, 4]\!]$. On considère les événements $A = \{1, 4\}, B = \{2, 4\}$ et $C = [\![1, 3]\!]$.

1. Existe-t-il une probabilité sur Ω telle que : $\mathbb{P}(A) = 0,6, \mathbb{P}(B) = 0,7$ et $\mathbb{P}(C) = 0,8$?
2. Existe-t-il une probabilité sur Ω telle que : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C)$?

6.

1. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et A, B, C trois événements.
   (a) Rappeler la formule pour $\mathbb{P}(A \cup B)$.
   (b) Montrer que $\mathbb{P}(A\cup B\cup C) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$.
2. On lance trois dés distincts et équilibrés. On considère les événements A « les numéros sont égaux », B : « au moins un des numéros est égal à 3 » et C : « la somme des numéros est égale à 4 ».
   Calculer la probabilité pour qu'au moins un des trois événements soit réalisé.

II. Probabilités uniformes

7. On lance deux fois un dé équilibré. On pose $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$

1. Trouver un libellé pour l'événement $A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$.
2. À quelle partie de Ω correspond l'événement B : « la somme obtenue est inférieure ou égale à 4 » ?
3. Calculer la probabilité de $A, B, A \cap B, A \cup B, A \backslash B, B \backslash A$.

---

8. On lance quatre fois un dé équilibré. Déterminer les probabilités des événements suivants :

a) On obtient jamais 1.

b) On obtient au moins une fois 1.

c) On obtient exactement deux fois 1.

d) On obtient au moins deux fois 1.

e) On obtient 1 au deuxième et au troisième lancer.

f) On obtient 4 numéros différents.

---

9. Soit $n \geq 5$. On tire avec remise 5 jetons d'une urne contenant n jetons numérotés. Déterminer la probabilité de :

a) tirer 5 jetons différents.

b) tirer une suite strictement décroissante.

c) voir exactement 2 numéros au cours des tirages.

d) voir au moins 3 numéros au cours des tirages.

---

10. La classe comporte 42 élèves. Calculer la probabilité qu'au moins deux élèves aient la même date d'anniversaire. Pour simplifier, on ignorera les années bissextiles : les dates d'anniversaires sont équiprobables parmi les 365 jours de l'année.
À partir de combien d'élèves dans une classe cette probabilité dépasse-t-elle $0,5$?

---

11. Un facteur a 4 lettres destinées à 4 personnes différentes. Ayant cassé ses lunettes il est obligé de distribuer les lettres au hasard, une dans chacune des 4 boîtes-aux-lettres. Quelle est la probabilité qu'au moins une personne reçoive la lettre qui lui était destinée ?

---

12. Une urne contient 10 boules blanches, 6 boules rouges, 4 boules noires.

1. On tire successivement trois boules de l'urne avec remise. Calculer la probabilité que le tirage soit :

   a) tricolore.

   b) unicolore.

   c) bicolore.

2. Mêmes questions avec un tirage simultané de trois boules.

---

13. Un joueur de poker reçoit une main de 5 cartes d'un jeu de 52 cartes (sans joker). Quelle est la probabilité que sa main contienne :

a) 5 cartes de la même couleur

b) (2 as et 3 rois) ou (3 as et 2 rois)

c) au moins un as et exactement deux rois

d) un carré

III. Conditionnement

14. Une urne contient b boules bleues et v boules vertes ($b, v \in \mathbb{N}^*$).

1. On effectue deux tirages successifs sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules de couleur différentes ?
2. Cette fois-ci, si la boule obtenue au premier tirage est bleues, on la remet dans l'urne avec 2 boules bleues supplémentaires. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules de couleur différentes ?
3. On effectue n tirages avec remise.

(a) Soit $k \leqslant n$. Déterminer la probabilité que la k-ième boule tirée soit blanche, sachant que les $(k-1)$ premières boules obtenues sont blanches.

(b) Quelle est la probabilité que les k premières boules tirées soient blanches ?

4. Reprendre la question précédente dans le cas où les tirages se font sans remise.

---

15. Mme H. dispose d'un trousseau de n clés, dont une seule ouvre la porte de sa salle de colle.

1. N'ayant pas beaucoup dormi la nuit précédente, Mme H. essaye les clés jusqu'à trouver la bonne, sans penser à mettre de côté les mauvaises clés. Quelle est la probabilité d'ouvrir la porte au k-ième essai ?
2. Que devient cette probabilité si Mme H. ne réessaye pas les mauvaises clés ?

---

16. Une usine fabrique des téléphones portables. La proportion de téléphones défectueux est de $0,05$. Le contrôle de fabrication des téléphones est tel que :

- Si le téléphone fonctionne parfaitement, il est accepté avec la probabilité $0,96$.
- Si le téléphone n'est pas parfait, il est refusé avec la probabilité $0,98$.

On choisit un téléphone au hasard et on le contrôle. Quelle est la probabilité :

a) qu'il y ait une erreur de contrôle ?

b) qu'un téléphone accepté soit en fait défaillant ?

---

17. On considère des urnes $U_1, U_2, \ldots$, qui contiennent toutes initialement b boules jaunes et b boules violettes, sauf la première qui contient 5 boules jaunes et 2 boules violettes. On tire une boule de U_1 que l'on met dans U_2 puis une boule de U_2 que l'on met dans U_3, et ainsi de suite.
On note p_i la probabilité d'obtenir une boule violette au i-ième tirage.

1. Calculer p_1, puis exprimer p_{i+1} en fonction de p_i pour $i \geq 1$.
2. En déduire p_i en fonction de i, et interpréter la valeur de $\lim\limits_{i \to +\infty} p_i$.

---

18. Un quart d'une population a été vaccinée. Parmi les vaccinés, il y a $\frac{1}{12}$ de malades. Parmi les malades, il y a 4 non vaccinés pour chaque vacciné. Quelle est la probabilité p pour un non vacciné de tomber malade ?

---

19. On dispose de trois pièces. La première fait Pile avec la probabilité $0,1$, la deuxième fait Pile avec la probabilité $0,4$, la troisième fait Pile avec la probabilité $0,6$. On choisit au hasard une des pièces et on la lance trois fois.

1. Déterminer la probabilité qu'on ait lancé la première pièce sachant qu'on a obtenu Pile Pile Face dans cet ordre.
2. Déterminer la probabilité qu'on ait lancé la première pièce sachant qu'on a obtenu 2 piles et un face.

---

20. Une abeille va chaque jour sur l'une des deux fleurs A et B. Au jour 0, elle va à la fleur A. À chaque nouvelle journée, il y a une probabilité $p \in]0,1[$ qu'elle aille sur la même fleur que la veille.
Pour tout entier n, on note A_n (respectivement B_n) l'événement « l'abeille est sur la fleur A (resp. B) le jour n ». On pose de plus $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ et $b_n = \mathbb{P}_(B_n)$.

1. Pour tout entier n, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. Justifier que $a_n + b_n = 1$, et déterminer les expressions explicites de a_n et b_n.
3. Vers quoi tendent les deux suites ? Interpréter.

---

21. On possède un jeu de 32 cartes et un jeu de 52 cartes. On choisit au hasard l'un de ces jeux et on y tire une carte. On constate que c'est une dame. Quelle est la probabilité qu'elle vienne du jeu de 32 cartes ?

---

22. Un magasin vend des sables laser provenant pour 70% d'un fabriquant A et pour 30% d'un fabriquant B. Parmi ceux qui proviennent de l'usine A, 20% ont un défaut, contre 10% pour ceux sortant de l'usine B. Vous vous offrez un superbe sabre laser et pas de chance, il est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par B ?

IV. Indépendance

23. On lance deux fois une pièce équilibrée. On note A l'événement : « le premier lancer donne Pile », B : « le deuxième lancer donne Pile » et C : « on obtient deux résultats différents ».
Étudier l'indépendance mutuelle et l'indépendance deux à deux de ces trois événements.

---

24. On contrôle séparément et de façon indépendante les trois dimensions d'un pavé. Les probabilités de refus sont égales à $0,06$ pour la longueur, $0,04$ pour la largeur et $0,08$ pour la hauteur.
Le pavé est refusé dès que l'une de ses dimensions ne convient pas. Quelle est la probabilité pour qu'un pavé soit refusé ?

---

25. On jette un dé n fois de suite

1. Calculer la probabilité p_n d'obtenir au moins un 6 .
2. Pour quelle valeur de n a-t-on $p_n \geqslant \frac{1}{2}$?

---

26. On considère un dé équilibré et un dé truqué telle que la probabilité d'obtenir 6 vaut $\frac{1}{4}$. On choisit un dé au hasard puis on effectue n lancers successifs avec ce dé.
On note B l'événement « choisir le dé truqué » et, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, A_i l'événement « obtenir 6 au i-ème lancer ».

1. Calculer $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$.
2. Les événements A_1 et A_2 sont ils indépendants ?
3. On a obtenu 6 à tous les lancers. Quelle est la probabilité que l'on ait choisi le dé truqué ? Quelle est la limite de cette probabilité ?

V. Type DS

27. Roudoudou le hamster vit une vie paisible de hamster. Il a deux activités : manger et dormir… On va voir Roudoudou à minuit (heure $n = 0$) : il est en train de dormir.

- Quand Roudoudou dort à l'heure n, il y a 7 chances sur 10 qu'il dorme à l'heure suivante et 3 chances sur 10 qu'il mange à l'heure suivante.
- Quand Roudoudou mange à l'heure n, il y a 2 chances sur 10 qu'il dorme à l'heure suivante et 8 chances sur 10 qu'il mange à l'heure suivante.

On note D_n l'événement « Roudoudou dort à l'heure n » et M_n : « Roudoudou mange à l'heure n ». On note $d_n = \mathbb{P}(D_n)$ et $m_n = \mathbb{P}(M_n)$ les probabilités respectives.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n + m_n = 1$.
2. Montrer rigoureusement que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad d_{n+1} = 0,7d_n + 0,2m_n$.
3. Exprimer de manière similaire m_{n+1} en fonction de d_n et m_n.
4. Soit A la matrice $A = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\begin{pmatrix} d_n \\ m_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
5. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
6. Vérifier que $P^{-1}AP = D$ où $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
7. Exprimer A^n en fonction de D^n et de P, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On justifiera le résultat par une récurrence.
8. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2 + \frac{3}{2^n} & 2 - \frac{2}{2^n} \\ 3 - \frac{3}{2^n} & 3 + \frac{2}{2^n} \end{pmatrix}$.
9. Donner les expressions explicites de d_n et m_n en fonction de n, et interpréter leur limite respective lorsque n tend vers $+\infty$.

28. On dispose de deux pièces indiscernables. On sait que l'une est équilibrée et l'autre truquée : elle donne Face avec probabilité $p > \frac{1}{2}$. On effectue une série de lancers en choisissant l'une des deux pièces avant chaque lancer.

Le but de ce problème est d'étudier plusieurs stratégies afin de maximiser la probabilité d'obtenir Face. Pour cela, on note pour chaque entier $n \geqslant 1$:

- E_n l'événement : « on choisit la pièce équilibrée au n-ième lancer ».
- F_n l'événement : « on obtient Face au n-ième lancer ».

1. Soit $n \geq 1$. Montrer que $\mathbb{P}(F_n) = p + \left(\frac{1}{2} - p\right)\mathbb{P}(E_n)$.
2. Stratégie 1 : À chaque lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard et de manière équiprobable. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$\mathbb{P}(F_n) = \frac{2p+1}{4}$$
3. Stratégie 2 : Au premier lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard et de manière équiprobable. Si on obtient «face», on continue d'utiliser la même pièce pour tous les lancers suivants. Sinon, on utilise l'autre pièce pour tous les lancers suivants.
   (a) Donner l'expression de $\mathbb{P}(F_1)$ sans justification.
   (b) Soit $n \geqslant 2$. Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{E_1}(En)$ et $P_{\overline{E_1}}(En)$ puis en déduire $\mathbb{P}(E_n)$.
   (c) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$,
$$\mathbb{P}(F_n) = \frac{4p^2+3}{8}$$
4. Comparer les stratégies 1 et 2 .
5. Stratégie 3 : Au premier lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard et de manière équiprobable. Puis à chaque lancer suivant, on utilise la même pièce que le lancer précédent si on a obtenu «face», sinon on change de pièce.
   (a) Donner les expressions de $\mathbb{P}(F_1)$ et $\mathbb{P}(F_2)$ sans justification.
   (b) Montrer qu'il existe $(a, b) \in]0, 1[\times \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geqslant 1$:
$$\mathbb{P}(E_{n+1}) = a\mathbb{P}(E_n) + b.$$
   (c) En déduire une expression de $\mathbb{P}(E_n)$ en fonction de a, b et $n \geqslant 1$.
   (d) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$\mathbb{P}(F_n) = \frac{1}{3-2p}\left(1 - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1}\right)$$
6. (a) Montrer par une étude de fonction que pour tout $p \geq \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{4p^2+3}{8} \leq \dfrac{1}{3-2p}$.
   (b) En déduire que la stratégie 2 est meilleure que la stratégie 3 sur le long terme.