

# TD Ch 21 – Intégration (2)

## I. Rappel - Calculs de primitives et d'intégrales

1. Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt$       b)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)} dt$       c)  $\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx$       d)  $\int_0^2 \frac{t^2}{\sqrt{t^3+8}} dt$   
e)  $\int_0^1 (x-1) \cos(x) dx$       f)  $\int_1^2 \frac{\left(1+\frac{1}{t}\right)^4}{t^2} dt$       g)  $\int_0^1 (t+1)^5(t-2) dt$  avec  $u = t+1$   
h)  $\int_1^2 \frac{1}{t(t^3+1)} dt$  avec  $u = t^3$       i)  $\int_2^{\sqrt{2}} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} dt$  avec  $u = \sqrt{t^2-1}$

---

2. Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes (sur un intervalle à déterminer).

a)  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$       b)  $f(x) = (x^2+3)\sqrt{x^3+9x-10}$       c)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}$   
d)  $f(x) = (x-1) \cos(x)$       e)  $f(x) = \frac{x}{\cos^2(x)}$       f)  $f(x) = (x+2)^2 e^{-x}$

---

## II. Sommes de Riemann

3. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  pour chacune des suites  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  suivantes.

a)  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^4}{n^5}$       b)  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}$       c)  $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$   
d)  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{k+n}$       e)  $S_n = \left(\prod_{k=1}^n (k+n)\right)^{\frac{1}{2n}}$       f)  $S_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

---

## III. Études de suites définies par une intégrale

4. Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $I_n = \int_1^e x^2 \ln^n(x) dx$ .

1. Calculer  $I_1$ .

2. Montrer soigneusement que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée par 0. Que peut-on en déduire ?

3. (a) Montrer que pour tout  $x \in [1, e]$ ,  $0 \leq \ln(x) \leq \frac{x}{e}$ .

(b) En déduire un encadrement pour  $(I_n)$ .

(c) Quelle est la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  ?

4. (a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$ .

(b) En déduire la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n$ .

---

**5.** On définit pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$ .

1. Étudier la monotonie de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et en donner un encadrement.
  2. En déduire la convergence et la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
  3. Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .
  4. Obtenir une relation de récurrence d'ordre deux pour la suite  $(I_n)$ .
- 

**6.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $J_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$ .

1. Montrer que la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante, et justifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$ .
  2. En déduire la convergence de la suite  $(J_n)$ .
  3. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $J_n = \frac{J_{n+1}}{n+1} - \frac{1}{(n+1)e}$ .
  4. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $0 \leq J_n - \frac{1}{(n+1)e} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ .
  5. Montrer que  $J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{ne}$ .
- 

**7 (Intégrales de Wallis).** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$ .

1. Calculer les trois premiers termes de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
  2. Montrer que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante. Est-elle convergente ?
  3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ .
  4. Montrer par récurrence que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a  $I_{2p} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}$  et  $I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$ .
  5. (\*\*)
    - (a) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2n}$ .
    - (b) Montrer par encadrement que  $\frac{I_n}{I_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .
    - (c) En déduire que  $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ .
- 

**8 (Lemme de Riemann-Lebesgue).** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur le segment  $[0, 1]$ .

1. Montrer qu'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\left| \int_0^1 f'(x) \sin(n\pi x) dx \right| \leq M$ .
  2. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) \cos(n\pi x) dx = 0$ . *On commencera par intégrer par parties.*
- 

**9.** On considère la fonction  $s$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $s(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

On définit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'intégrale  $J_n = \int_0^1 s(t)^n dt$ .

1. Montrer que  $s$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ , et justifier que l'intégrale  $J_n$  est bien définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Dresser le tableau de variations de la fonction  $s$  sur  $[0, 1]$ .
3. Montrer que la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et à valeurs positives.
4. En déduire que la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. On notera  $\ll$  sa limite.
5. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout réel  $a \in ]0, 1[$ , on a :

$$\int_0^a s(t)^n dt \leq a \quad \text{et} \quad \int_a^1 s(t)^n dt \leq (1-a)\varphi(a)^n$$

6. En déduire que pour tout  $a \in ]0, 1[$ ,  $0 \leq \ell \leq a$ , et conclure sur la valeur de la limite  $\ell$ .
-

## IV. Études de fonctions définies par une intégrale

**10.** Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\text{a) } f : x \mapsto \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t^2}} dt \quad \text{b) } g : x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t \ln(t^2+3)} \quad \text{c) } h : x \mapsto \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t^2+3)}$$

---

**11.** Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$ .

1. Justifier que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ , et déterminer sans calcul le signe de  $f(x)$  en fonction de  $x$ .
  2. Calculer  $f'$  et montrer que  $f$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
  3. Étudier les variations de  $f$ .
  4. Montrer que  $f$  est une fonction impaire. On exprimera  $f(-x)$  à l'aide du changement de variable  $u = -t$ .
- 

**12.** On pose  $g(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ .

1. Déterminer le domaine de définition de  $g$ .
  2. Justifier que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur son domaine de définition, et déterminer  $g'$ .
  3. En déduire que  $g$  est une fonction constante que l'on déterminera.
- 

**13.** Soit  $h(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$ .

1. Quel est l'ensemble de définition de  $h$ ?
  2. Justifier que  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur son ensemble de définition, et déterminer sa dérivée.
  3. Pour  $x > 1$ , encadrer  $h(x)$  en utilisant la monotonie de  $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ . En déduire la limite de  $h(x)$  en  $+\infty$ .
  4. Pour  $0 < x < 1$ , encadrer de la même manière  $h(x)$  (attention aux signes!). En déduire la limite de  $h(x)$  quand  $x$  tend vers 0 (à droite).
  5. (a) Montrer que la fonction  $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t \ln(t)}$  est prolongeable par continuité en 1. On notera  $g$  ce prolongement.  
(b) Calculer pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  la valeur de  $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)}$ .  
(c) En déduire que pour tout  $x \in \mathcal{D}_h$  :  $h(x) = \int_x^{x^2} g(t) dt + \ln(2)$ .  
(d) Déterminer la valeur de  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ .
  6. On prolonge  $h$  par continuité en 0 et en 1. Dresser le tableau de variations de  $h$ .
-