

TD Ch 22 – Applications linéaires et matrices

I. Applications linéaires

1. Pour chacune des applications suivantes, déterminer si elle est linéaire. On précisera les espaces vectoriels de départ et d'arrivée.

- a) $f(x, y) = (x - y, x, 2x + y)$ b) $f(x, y) = (y, x^2)$ c) $f(x) = |x|$
d) $f(x, y) = (x + y, \sqrt{x^2 + y^2})$ e) $f(x, y) = (5x + 2y, 0, -3x)$ f) $f(x, y, z) = (xyz, x - z)$
g) $f(x, y, z, s, t) = (x + t, 0, 2x - 3y + 1)$
-

2. Pour chacune des applications suivantes, déterminer si elle est linéaire. On note Q le polynôme $Q(X) = X^2 - 3X + 2$

- a) $\varphi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto 3(X^2 - 2X - 1)P \in \mathbb{R}[X]$ b) $\mathcal{D} : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P'' + P' + P \in \mathbb{R}[X]$
c) $f : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto Q \circ P \in \mathbb{R}[X]$ d) $g : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P \circ Q \in \mathbb{R}[X]$
-

3. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ l'application suivante est-elle linéaire ? On définit f sur \mathbb{R}^3 par :
 $f(x, y, z) = (x - m + 4(y - m) + 5z - 2m, 2(x + 2m) + 5(y + m) + 7z, 3x + 6y + 9z + 3m)$

4. Soient les vecteurs $u = (1, 1)$, $v = (2, -1)$ et $w = (1, 4)$.

- Montrer que (u, v) forme une base de \mathbb{R}^2 .
 - Déterminer les coordonnées de w dans la base (u, v) , puis les coordonnées d'un vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ quelconque.
 - Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ existe-t-il une application linéaire $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui vérifie $g(u) = (2, 1)$, $g(v) = (1, -1)$ et $g(w) = (5, a)$? Déterminer alors l'expression explicite de g .
-

II. Exercices théoriques

5. Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f^2 + f + id_E$.
Montrer que f est un automorphisme.

6. Soit E un espace vectoriel et $G \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^3 - g^2 = 0$. Montrer que si $g \neq id_E$, alors g n'est pas bijective.

7. Soit E un espace vectoriel, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

- Montrer que $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$ et que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$.
 - Montrer que $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si et seulement si $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.
-

8. Soient E, F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E . On note $f(\mathcal{F}) = (f(u_1), \dots, f(u_n))$ la famille de leurs images.

- Montrer que si $f(\mathcal{F})$ est libre, alors \mathcal{F} est libre.
 - Montrer que si \mathcal{F} est libre et que f est injective, alors $f(\mathcal{F})$ est libre.
 - Montrer que si \mathcal{F} est génératrice de E et que f est surjective, alors $f(\mathcal{F})$ est génératrice de F .
 - Montrer que f est bijective si et seulement si l'image de toute base de E par f est une base de F .
-

9. Soit E un espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que : $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f) \iff \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$

10. Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$.

Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que la famille $(u, f(u), f^2(u))$ soit libre.

11. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que : $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f) \iff f^2 = 0$ et $\text{rg}(f) = \frac{n}{2}$

12. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

1. Que dire de $g \circ f$?
 2. Montrer que $g \circ f$ n'est ni surjective ni injective.
 3. Que peut-on en déduire sur $\text{rg}(g \circ f)$?
-

13. Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

Montrer que : $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$

III. Noyau, Image, Rang – sans matrices

14. Montrer que les applications suivantes sont linéaires, calculer leur image et leur noyau et en donner une base. Dire lesquels de ces mots s'appliquent : injective, surjective, isomorphisme, automorphisme.

a) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x - y, y + z) \end{cases}$

b) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (2x - 3y, x - y, x + 2y) \end{cases}$

c) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - 2y, x, 5y) \end{cases}$

d) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (3x - y, 2x + z, x - 2y) \end{cases}$

e) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y + z, x - y - 3z, 3x + y - z) \end{cases}$

f) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x + 3y - z, -2x - 3y + z, 4x + 6y - 2z) \end{cases}$

g) $f : \begin{cases} \mathbb{R}_4[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \mapsto & P'' \end{cases}$

h) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y) + (y - z)X + (z - x)X^2 \end{cases}$

15. On considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 et la forme linéaire f sur \mathbb{R}^4 définie par $f(x, y, z, t) = -y + 2z - t$. Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$.

16. Soit m un paramètre réel. Décrire le noyau de l'application linéaire suivante, et déterminer (en fonction de m) si elle est injective, surjective, bijective.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \mapsto & (t - y, my, x - mz - t) \end{cases}$$

17. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que : $f(1, 0, 0) = (3, 2, 1)$, $f(0, 1, 0) = (1, -1, 2)$, $f(0, 0, 1) = (3, 7, -4)$

Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et de $\text{Im } f$ et préciser leur dimension.

18. Soit f l'application définie sur \mathbb{R}^3 par $f(x, y, z) = (3y - 2z, -x, 4y + 3z)$.

Montrer que f est un automorphisme de \mathbb{R}^3 et déterminer sa réciproque.

19. Soient (e_1, e_2, e_3) une base d'un espace vectoriel E , et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que la donnée de : $f(e_1) = e_1 + e_2$, $f(e_2) = e_1 - e_2$, $f(e_3) = e_1 + \lambda e_3$ définit un unique endomorphisme de E .
 2. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'application f ainsi définie est-elle injective? Surjective? Un automorphisme?
-

IV. Avec les matrices

20. Pour chacune des applications de l'exercice 14, donner sa matrice dans les bases canoniques.

21. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par $f(x, y, z) = (2x - y, x + y + z)$.

1. Écrire sa matrice relativement aux bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 .
 2. On considère les familles $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ de \mathbb{R}^3 et $\mathcal{C} = ((1, 0), (1, 1))$ de \mathbb{R}^2 .
Montrer que ce sont des bases, puis donner la matrice de f relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{C}
-

22. Soient $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ et $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définies par :

$$f(x, y, z) = (3x - 2y, 3y - 2z, 3z - 2x, x + y + z) \quad \text{et} \quad g(x, y, z, t) = (2x - y, 3y - t, z + t).$$

1. Déterminer les matrices de f et g dans les bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^4 .
 2. Déterminer les matrices de $g \circ f$ et de $f \circ g$, puis expliciter ces deux applications.
-

23. Dans chaque cas M est la représentation d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ dans les bases canoniques. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

a) $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 4 \\ -6 & -9 & 1 \end{pmatrix}$

b) $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

c) $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \\ -3 & -5 & 9 \end{pmatrix}$

d) $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

e) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

f) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

24. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ canoniquement associé à la matrice $A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $10f^2 - 7f - 3\text{id} = 0$.
 2. En déduire que f est un automorphisme de \mathbb{R}^2 et préciser la matrice de f^{-1} .
 3. Retrouver ce résultat par un calcul matriciel.
-

25. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme f de \mathbb{R}^2 dans la base canonique.

Trouver une base de \mathbb{R}^2 dans laquelle f admette pour matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

26. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$.

On pose : $u = (2, 4, -5)$, $v = (1, 0, 1)$, $w = (0, -1, 2)$

1. Montrer que $u \in \text{Ker}(f + \text{id})$ et que $\{v, w\} \subset \text{Ker}(f - \text{id})$
 2. Montrer que (u, v, w) est une base de \mathbb{R}^3 .
 3. Donner la matrice de f dans la base (u, v, w) .
 4. En déduire f^2 .
-

27. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $\text{rg}(A - \lambda I_3) < 3$.
-

2. Pour les valeurs de λ trouvées à la question précédente, déterminer $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^3})$.
3. En déduire une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est diagonale.

28. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & d \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Déterminer le rang de f .
2. On suppose que $a = 0$. Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$.

29. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang de l'application linéaire définie sur \mathbb{R}^4 par

$$f(x, y, z, t) = (x + t + ay, y + z + ax, y + z + at, x + t + az)$$

V. Approfondissements

30. Soient $E = \mathbb{R}[X]$, $f : E \rightarrow E, P \mapsto P'$ et $g : E \rightarrow E, P \mapsto XP$

1. Montrer que f et g appartiennent à $\mathcal{L}(E)$.
2. Que vaut $f \circ g - g \circ f$?
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f \circ g^n - g^n \circ f = ng^{n-1}$.

31. On considère l'application $f : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (X + 2) + P(X) - 2P(X + 1)$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$.
2. Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et de $\text{Im } f$ et préciser leur dimension.

32. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (P(0), P'(0), \dots, P^{(n)}(0)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ est un isomorphisme, et exprimer φ^{-1} .

33. Soit $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \varphi(A) = \begin{pmatrix} a - b & a - c \\ d & b + d \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{R}))$. φ est-elle injective ?
2. Donner la matrice de φ dans la base canonique.
3. Donner une expression de φ^{-1} .

34. Donner les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels correspondants :

1. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto 5x - y + z$
2. $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_4[X], P \mapsto P - X^3 P'$
3. $f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_3[X], \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a + bX + cX^2 + dX^3$
4. $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^4, P \mapsto (P(1), P(2), P(3), P(4))$
5. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ telle que $f(1, 2) = (0, 5, 8)$ et $f(2, 3) = (5, 0, 1)$.
6. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^4)$ telle que $f(1 + X) = (2, 1, 0, 1), f(1 + X^2) = (0, 3, 0, 3)$, et $f(1 + X + X^2) = (3, 2, 1, 0)$.

35. 1. Montrer que $\mathcal{B} = (1, (X - 1), (1 + X)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X], P \mapsto f(P) = 2(X + 1)P - (X^2 - 2X + 1)P'$.

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer sa matrice dans la base \mathcal{B} .