TD Ch 23 – Variables aléatoires finies

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls, avec $a < b$. Soit X une variable aléatoire réelle finie à valeurs dans $[\![1, ab]\!]$ et telle que : $\forall k \in [\![1, ab]\!], \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

1. Quelles conditions doivent vérifier a et b pour que X soit effectivement une variable aléatoire réelle ?
2. Déterminer la fonction de répartition de X et résoudre l'équation $F_X(u) = \frac{1}{2}$.
3. Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et trouver a et b pour que $\mathbb{E}(X) = \frac{13}{2}$.

---

2. Soit X une variable aléatoire réelle prenant ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$. Soit a un réel strictement positif. On suppose que la loi de X est donnée par :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \mathbb{P}(X = k) = \ln\left(a^k\right)$$

Calculer a pour que X soit effectivement une variable aléatoire réelle, puis calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

---

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a un nombre réel. Soit X la variable aléatoire réelle à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telle que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = a\binom{n+1}{k+1}$$

1. Déterminer a pour que X soit une variable aléatoire réelle.
2. Calculer $\mathbb{E}(X+1)$ à l'aide du "truc du chef", et en déduire $\mathbb{E}(X)$.
3. De la même manière, calculer $\mathbb{E}(X(X+1))$ et en déduire $\mathbf{V}(X)$.

---

4. Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On procède de la manière suivante :

- Si on tire la boule blanche on la remet et on en rajoute une autre de couleur blanche.
- Si on tire la boule noire on s'arrête.
- On fait un maximum de 5 tirages.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire avec comme convention $X = 0$ si la boule noire n'est jamais tirée.
Déterminer la loi de X et calculer son espérance et sa variance.

---

5. On lance deux dés cubiques équilibrés, les faces étant marquées de 1 à 6.

1. On perd 2€ si la somme des points obtenus est supérieure strictement à 7 , on gagne 1€ sinon. On note G le gain obtenu après avoir lancé les dés. On dit que le jeu est équitable si $\mathbb{E}(G) = 0$. Le jeu est-il équitable ?
2. On considère maintenant la règle suivante : on perd 1€ si la différence en valeur absolue entre les deux dés vaut 1 ou 2 , on gagne 1€ sinon. Le jeu est-il équitable ?

---

6. Trois chasseurs d'élite (abattant leur cible à tous les coups) tirent sans se concerter, chacun sur l'un des trois lapins enfermés dans la cage devant eux. Chaque chasseur dispose d'une seule balle. On pose X le nombre de lièvres abattus.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
3. Soit Y le nombre de balles reçues par le lapin L_1. Quelle est la loi de Y ?
4. En déduire $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

5. Quelle est la probabilité de survie de L_1 ?

---

7. Dans chacune des expériences qui suivent reconnaître la loi de X et préciser ses paramètres ainsi que l'univers image.

1. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs. X est le nombre d'objets dans le premier tiroir.
2. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos. X est le nombre de bosses.
3. On prend un jeu de 32 cartes mélangées. On retourne une par une les cartes jusqu'à l'apparition de l'as de cœur. X est le nombre de cartes que l'on a retournées.
4. On suppose que la probabilité de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques. X est le nombre de garçons dans une famille de 3 enfants.
5. On suppose que 1% des trèfles possèdent quatre feuilles. On cueille 100 trèfles. X est le nombre de trèfles à quatre feuilles cueillis.

---

8. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N.

1. On tire n boules avec remise. Soit X le plus petit numéro obtenu et soit Y le plus grand numéro obtenu au cours de ces n tirages.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(Y \leq y)$ pour tout $y \in [\![1, N]\!]$. En déduire la loi de Y.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(X \geq x)$ pour tout $x \in [\![1, N]\!]$. En déduire la loi de X.
2. Calculer la loi de Y, mais en effectuant les tirages sans remise.

---

9. p personnes montent au rez-de-chaussée dans un ascenseur desservant n étages. On admet que chaque personne s'arrête à un étage aléatoire, indépendamment des autres.
Déterminer l'espérance du nombre d'arrêts de l'ascenseur.
On pourra introduire, pour $i \in [\![1, n]\!]$, la variable A_i qui vaut 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage i et 0 sinon.

---

10. Deux personnes lancent n fois chacune une pièce symétrique. Quelle est la probabilité qu'elles obtiennent le même nombre de Pile ?

---

11. Soit $p \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On tire n fois de suite sur une cible avec la probabilité p d'atteindre cette cible. A l'issue des n tirs, un compteur comptabilise le nombre de fois où la cible a été atteinte au cours de ces n tirs.

Cependant ce compteur connaît un problème technique, il affiche le bon résultat avec la probabilité $0,5$ et le bon résultat augmenté de 1 avec une probabilité $0,5$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la cible a été atteinte lors de ces n tirs et soit Y la variable aléatoire réelle égale au nombre affiché par le compteur.

1. Identifier la loi de X. Donner son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Soit $Z = Y - X$. Identifier la loi de Z. Préciser son espérance et sa variance. En déduire l'espérance de Y.

---

12. 1. Quelques calculs préliminaires.
   (a) Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. Montrer que

$$k(k-1)\binom{n+1}{k} = (n+1)n\binom{n-1}{k-2}$$

   (b) En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{k(k-1)}{n^k}\binom{n+1}{k}$$

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs, avec remise, selon le protocole suivant : on note B_k le numéro de la k-ième boule tirée et on arrête les tirages dès que $B_k \geqslant B_{k-1}$. Soit X la variable aléatoire réelle finie égale au nombre de tirages effectués.

2. Déterminer $X(\Omega)$ (et vérifier que c'est bien un ensemble fini…)
3. Calculer $\mathbb{P}(X > k)$ et en déduire la fonction de répartition de X.
4. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance.

---

13. Une puce se déplace sur une droite graduée, par sauts indépendants d'amplitude 1. À chaque saut, elle se déplace aléatoirement vers la gauche ou vers la droite.
Soit X_n sa position après n sauts (elle commence à la position 0).
Soit Y_n le nombre de fois où la puce à sauté vers la droite au cours des n premiers sauts. On fixe $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner la loi de Y_n.
2. En déduire la loi de X_n.
3. Quelle est la probabilité que la puce revienne à son point de départ après n sauts ? On distinguera en fonction de si n est pair ou impair.

---

14. Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes distinctes. La probabilité de joindre une personne est p. On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes obtenues.

1. Déterminer la loi de X et donner son espérance et sa variance.
2. Après ses n premiers appels, le secrétaire essaye de joindre les personnes qu'elle n'a pas eu au téléphone lors du premier appel. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus lors du deuxième appel.
   (a) Déterminer $Y(\Omega)$.
   (b) On suppose que l'événement $(X = k)$ est réalisé. Déterminer, en fonction de k, le nombre d'appel que le secrétaire peut faire lors de la deuxième tentative.
   (c) Pour tout entier $i \in [\![0, n]\!]$, exprimer $\mathbb{P}_{(X=k)}(Y = i)$ en fonction de k et i. On distinguera les cas $i \leqslant n - k$ ou $i \geqslant n - k + 1$.
3. On souhaite déterminer la loi de Y.
   (a) Montrer que $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-k \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-i \\ k \end{pmatrix}$.
   (b) En utilisant le système complet d'événement $((X = k))_{k\in[\![0,n]\!]}$, déterminer $\mathbb{P}(Y = i) \forall i \in Y(\Omega)$.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

---

15. En 2026, Camille décide d'écrire régulièrement à Alex. Le premier jour, il lui écrit à coup sûr. S'il lui a écrit le jour i, il lui écrit le lendemain avec probabilité $\frac{1}{2}$. Sinon, il lui écrit le lendemain à coup sûr.
On note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si Camille écrit à Alex le jour i, et 0 sinon.

1. Déterminer une relation de récurrence entre $\mathbb{P}(X_{i+1} = 1)$ et $\mathbb{P}(X_i = 1)$.
2. En déduire la loi de X_i pour tout $i \in [\![1, 365]\!]$.
3. Soit X le nombre de lettres envoyées dans l'année. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

---

16. Dans un jeu télévisé, la candidate doit répondre à 20 questions indépendantes de culture générale. Pour chaque question, l'animateur propose 3 réponses possibles, une seule étant la réponse exacte. La candidate s'est préparée, et connaît la réponse pour 60% des questions possibles du jeu, et pour les autres, elle donne une réponse au hasard.
On note X le nombre de bonnes réponses données par la candidate au cours du jeu. Déterminer la loi de X, ainsi que son espérance et sa variance.
