

# TD Ch 24 – Développements limités

## I. Calculs de DLs

**1.** Dans chacun des cas suivants, déterminer le développement limité de la fonction dont on donne l'expression, au voisinage de 0, à l'ordre donné :

- |   |   |  |
|---|---|--|
| 1) $e^x - \frac{1}{1-x}$ à l'ordre 2              | 2) $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4                             | 3) $\sqrt[3]{1+x+x^2}$ à l'ordre 2                 |
| 4) $\cos \sqrt{x}$ à l'ordre 5                    | 5) $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ à l'ordre 1           | 6) $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5                 |
| 7) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2              | 8) $\sin x - x \cos x$ à l'ordre 8                        | 9) $2^x - 1$ à l'ordre 2                           |
| 10) $e^{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3                  | 11) $\tan^2 x$ à l'ordre 6                                | 12) $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 |
| 13) $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ à l'ordre 3             | 14) $\ln(1+\cos(2x))$ à l'ordre 4                         | 15) $\frac{x+1}{x^2+x+2}$ à l'ordre 3              |
| 16) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ à l'ordre 4 | 17) $\cos\left(\frac{\pi x}{2 \tan x}\right)$ à l'ordre 4 | 18) $(1+\arctan x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 3      |

**2.** Déterminer le développement limité à l'ordre  $n$  donné de la fonction  $f$  au voisinage de  $x_0$  dans les cas suivants :

1.  $f(x) = \sqrt{x}$ , au voisinage de  $x_0 = \frac{1}{4}$ , à l'ordre  $n = 5$
2.  $f(x) = \frac{1}{x}$ , au voisinage de  $x_0 = 1$ , à l'ordre  $n = 5$
3.  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ , au voisinage de  $x_0 = 3$ , à l'ordre  $n = 4$
4.  $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ , au voisinage de  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ , à l'ordre  $n = 3$
5.  $f(x) = x^{-\frac{1}{1+\ln x}}$ , au voisinage de  $x_0 = 1$ , à l'ordre  $n = 3$
6.  $f(x) = e^{x-1}$ , au voisinage de  $x_0 = 1$ , à l'ordre  $n$  quelconque.
7.  $f(x) = \frac{x^n \ln x}{x^2 - 1}$ , au voisinage de  $x_0 = 1$ , à l'ordre 2

## II. Limites et équivalents

**3.** Dire si les fonctions suivantes ont une limite au point  $a$ , et si oui la déterminer.

- |  |   |
|--|---|
| 1) $x \mapsto \frac{e^x - \ln(1+x) - \cos x}{\sin x - x}$ en $a = 0$                             | 2) $x \mapsto \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$ en $a = 0$                                 |
| 3) $x \mapsto \frac{\sin^2 x - x \ln(1+x)}{e^x + \cos x - \sin x - 2}$ en $a = 0$                | 4) $x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2$ en $a = +\infty$                  |
| 5) $x \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}$ en $a = 0$                                     | 6) $x \mapsto \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$ en $a = 1$                                 |
| 7) $x \mapsto \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x \ln x}$ en $a = +\infty$                    | 8) $x \mapsto (x^6 + x^2 + 1)^{\frac{1}{6}} - (x^4 + 1)^{\frac{1}{4}}$ en $a = +\infty$ |
| 9) $x \mapsto \left(\frac{3^{\frac{1}{x}} + 4^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{\ln x}$ en $a = +\infty$ | 10) $x \mapsto \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - \tan x}$ en $a = 0$                     |

$$11) x \mapsto (2x^2 - 3x + 1) \tan(\pi x) \text{ en } a = \frac{1}{2}$$

$$13) x \mapsto x^2 \left( e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right) \text{ en } a = +\infty$$

$$15) x \mapsto x^{\frac{1}{1-x}} \text{ en } a = 1$$

$$12) x \mapsto \left[ \left( \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^x - 1 \right] \ln x \text{ en } a = +\infty$$

$$14) x \mapsto \frac{\tan x - 1}{\sin(2x) - 1} \text{ en } a = \frac{\pi}{4}$$

$$16) x \mapsto \frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \text{ en } a = 1$$

**4.** Trouver un équivalent des fonctions suivantes au voisinage du point  $a$  donné :

$$1) f(x) = \frac{2}{\sin x} - \frac{2}{\ln(1+x)} \text{ en } a = 0$$

$$2) f(x) = \sin(2x) - 2 \sin x \text{ en } a = 0$$

$$3) f(x) = \ln\left(\frac{\tan x}{x}\right) \text{ en } a = 0$$

$$4) f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{1+x}\right) - \frac{1}{x} \text{ en } a = +\infty$$

$$5) f(x) = (e+x)^e - e^{e+x} \text{ en } a = 0$$

$$6) f(x) = \sin(\ln(1+x)) - \ln(1+\sin x) \text{ en } a = 0$$

### III. Étude locale de fonctions

**5.** Dans chacun des cas suivants, étudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction  $f$  au voisinage de  $+\infty$  et de  $-\infty$  (s'il y a lieu). On étudiera aussi la position locale de la courbe par rapport à son asymptote au voisinage de  $+\infty$  et de  $-\infty$  (s'il y a lieu).

$$1) f(x) = (x+1) \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$2) g(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x}$$

$$3) h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$4) f(x) = x - 2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$5) f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

$$6) f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(x+2)}$$

**6.** Pour chaque fonction, étudier sa régularité, ses variations (sauf pour  $h$ ), l'allure de sa courbe représentative au voisinage du point d'abscisse 0 et l'existence d'asymptotes en  $\pm\infty$ .

$$1) f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$$

$$2) g(x) = x e^{\frac{1}{x}}$$

$$3) h(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

### IV. Développement limité d'une fonction réciproque

**7.** Soit la fonction  $f$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \arctan x + e^x - 1.$$

1. étudier  $f$  et en dessiner la courbe dans un repère orthonormé.
2. Montrer que  $f$  induit une bijection de  $\mathbb{R}$  dans un intervalle  $I$  à préciser.
3. Soit  $g$  la réciproque de la bijection précédente.  
Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ .  
En déduire que  $g$  admet, en tout point de  $I$ , des développements limités à tout ordre.
4. En utilisant le fait que  $g \circ f = Id_{\mathbb{R}}$ , donner un développement limité de  $g$  à l'ordre 2 au voisinage de 0.

- 8.**
1. Montrer que la fonction  $f : x \mapsto e^x + x - 1$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .
  2. Montrer que sa fonction réciproque  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de  $f^{-1}$ .

## V. Développement limité et régularité

**9.** Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$ .

1. Montrer que  $f$  admet un prolongement par continuité en 1.
  2. Ce prolongement est-il dérivable ?
  3. Montrer que  $f$  admet un prolongement par continuité en 0.
  4. Ce prolongement est-il dérivable ?
- 

**10.** Soit  $a$  un paramètre réel. On définit la fonction  $f$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \cos \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{e^{\sqrt{-x}} + e^{-\sqrt{-x}}}{2} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de  $a$  la fonction  $f$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}$  ?
  2. On suppose désormais que  $a$  est égal à la valeur trouvée à la question 1. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer la dérivée  $f'(x)$  pour tout  $x$  réel.
- 

**11.** Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{\cos x}{1 + x + x^2}$ . Calculer  $f^{(4)}(0)$ .

---

**12.** Oral agro 2001.

Soient un entier  $n \geq 1$  et la fonction  $f$  d'une variable réelle  $x$  définie par

$$f(x) = \ln \left( 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \right).$$

1. Montrer que  $f$  est définie au voisinage de 0 et de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .
  2. Calculer  $f'(0)$ ,  $f''(0)$  et  $f^{(3)}(0)$ .
-