

TD Ch 25 – Fonctions de 2 variables réelles

1. Dans chacun des cas suivants donnez l'ensemble de définition de la fonction f . Représentez cet ensemble (en hachurant une partie du plan.)

a) $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

b) $f(x, y) = e^{xy} - 1$

c) $f(x, y) = y - x^2$

d) $f(x, y) = \ln(1 - xy)$

e) $f(x, y) = \ln(1 + x + x^2 + y^2)$

f) $f(x, y) = \sqrt{\frac{(x-1)(y-1)}{x+2}}$

2. Soit $f(x, y) = \ln(2x + x^2 + y^2)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que les lignes de niveau de f sont des cercles dont on donnera le centre et le rayon.

3. Dans chacun des cas suivants : représenter le domaine de définition, puis calculer les dérivées partielles (d'ordre 1) de f .

a) $f(x, y) = x^2 y \cos(2x + y)$

b) $f(x, y) = x^2 \arctan\left(\frac{y}{x^2+1}\right)$

c) $f(x, y) = \ln(x)e^y + \frac{x}{y^3} - 2 \cos(y)$

d) $f(x, y) = \ln(x-1)\sqrt{y} + \sqrt{x+y-3}$

e) $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$

f) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1} - 3 \ln(x^2 y)$

4. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par : $f(x, y) = \begin{cases} e^{x \ln(x^2+y^2)} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Déterminer les dérivées partielles de f en $(x, y) \neq (0, 0)$.
2. Montrer que f n'a pas de dérivée partielle par rapport à x en $(0, 0)$.
3. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existe et déterminer sa valeur.

5. Soit $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$. Calculer le gradient $\vec{\nabla} f$ en fonction du vecteur $\vec{u} = (x, y)$.

6. Soient $f(x, y) = e^{x-2y}$, $u(t) = \sin t$, et $v(t) = t^3$.

1. Calculer les dérivées partielles de f .
2. Soit $g(t) = f(u(t), v(t))$. Expliciter la fonction g et calculer sa dérivée.
3. Calculer $u'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t))$.

7. Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par $f(x, y) = x^y$.

1. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, et calculer toutes ses dérivées partielles d'ordre 1.
2. Donner l'équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(1, 1)$.
3. En déduire une valeur approchée de $(1.1)^{0.95}$.

8. Dans chacun des cas suivants écrire l'équation du plan tangent à la surface représentative de la fonction f , en tout point où cela est possible, puis en déduire la valeur approchée demandée.

1. $f(x, y) = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)$: valeur approchée de $f(1, 1; 0, 9)$

2. $f(x, y) = \sin^2(x) + \cos^2(y)$: valeur approchée de $f(0, 75; 0, 82)$ ($\frac{\pi}{4} \approx 0, 7854$)

3. $f(x, y) = \frac{x+3y}{y-3x}$: valeur approchée de $f(2, 1; 3, 9)$

9. Dans chaque cas suivants, déterminer, s'il en existe, les points critiques de la fonction f .

- a) $f(x, y) = (x + y)e^{-(x^2+y^2)}$ b) $f(x, y) = xe^y + ye^x$ c) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$
d) $f(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)}$ e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ f) $f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xyz - z + y$
-

10. On définit f sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 - 4x + y^3 - 3y$.

- Déterminer les extrema potentiels de f .
 - Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}$ et tout $k \in [-3, +\infty[$: $f(2 + h, 1 + k) - f(2, 1) \geq 0$.
 - En déduire que f possède un minimum local en $(2, 1)$. Est-ce un minimum global ?
 - En observant $f(2 + t, -1)$ et $f(2, -1 + t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, conclure quant à l'autre extrema potentiel.
-

11. On considère la fonction f définie par $f(x, y) = x(\ln(x) + x + y^2)$.

- Donner le domaine de définition de f , et justifier que f est continue sur ce domaine.
 - On définit $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = \ln(x) + 2x + 1$.
Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$, et vérifier que $\alpha \in]0, \frac{1}{e}[$.
 - En déduire que f admet au plus un extremum.
-

12. Pour toute fonction f admettant des dérivées partielles d'ordre 2 sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, on définit son **laplacien** Δf par :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}, \quad \Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

On considère une fonction $u : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 , et f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = u(\sqrt{x^2 + y^2})$.

- Justifier qu'en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, les fonctions partielles de f sont de classe \mathcal{C}^2 .
- Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} u''\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} u'\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

- En déduire une expression du laplacien de f en fonction de $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$, u' et u'' .
 - On suppose maintenant que $\Delta f = 0$. Déterminer une équation différentielle vérifiée par u sur \mathbb{R}_+^* .
 - Résoudre cette équation et déterminer les fonctions f convenables.
-

13. On considère une série statistique à 2 variables donnée par des points $((x_k, y_k))_{1 \leq k \leq n}$. On souhaite trouver une droite d'équation $y = ax + b$ qui minimise la somme des carrés des distances verticales qui séparent la droite de chacun des points du nuage.

- Justifier que cela revient à trouver le minimum de la fonction suivante :

$$S : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sum_{k=1}^n (y_k - (ax_k + b))^2$$

- Déterminer les dérivées partielles de $\frac{\partial S}{\partial a}(a, b)$ et $\frac{\partial S}{\partial b}(a, b)$ en tout point (a, b) .
 - Rappeler les définitions des moyennes \bar{x} et \bar{y} , puis rappeler les formules de König-Huygens pour V_x et $\text{cov}(x, y)$.
 - En déduire l'unique point critique de S . Que retrouve-t-on ?
-