TD Ch 3 – Vocabulaire des applications

I. Injection, surjection, bijection

1. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$.

1. Déterminer les images directes suivantes :

   a) $f([1;+\infty[)$ b) $f(\mathbb{R})$ c) $f([-3;5[)$

2. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

---

2. On considère $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_+$ et $g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$.
Expliciter $g \circ f$ et $f \circ g$. Quel enseignement peut-on en tirer ?

---

3. Pour chacune des applications suivantes, étudier son injectivité, sa surjectivité, sa bijectivité. Lorsqu'elle est bijective, déterminer son application réciproque.

a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$ b) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$ c) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array} \right.$

d) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \right.$ e) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \right.$ f) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^4 \end{array} \right.$

g) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$ h) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$ i) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2n+1 \end{array} \right.$

---

4. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$

1. Montrer que $f \circ f = 2 \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.
2. Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.

---

5. Soit f une fonction définie par l'expression : $f(x) = \dfrac{x-1}{1-2x}$.

1. Déterminer de domaine de définition de f, noté $\mathcal{D}$ dans la suite.
2. Résoudre l'équation à paramètre $f(x) = m$, de paramètre $m \in \mathbb{R}$ et d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire $f(\mathcal{D})$. L'application $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est-elle surjective ?
4. On considère la restriction $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & f(\mathcal{D}) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$. Montrer à l'aide de la question 2 que g est bijective, et expliciter son application réciproque.

---

6. Même exercice que le précédent, avec $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{x}{|x|+1} \in \mathbb{R}$.

II. Exercices théoriques

7. Soit E un ensemble. On rappelle que pour tout $A \subset E$, la fonction caractéristique de A (dans E), notée $\mathbb{1}_A$, est l'application qui à x dans E associe 1 si $x \in A$ et 0 sinon.
On se fixe A et B deux parties quelconques de E.

1. Montrer que $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$.
2. Montrer que $A \subset B \iff \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$.
3. En déduire que $A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.
4. Exprimer en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ les fonctions suivantes : $\mathbb{1}_{\overline{A}}$, $\mathbb{1}_{A\cap B}$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}$.
5. Dans quels cas l'application $\mathbb{1}_A$ est-elle injective ?

---

8. Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f = f$.
Montrer que si f est injective ou surjective, alors $f = \mathrm{id}_E$.

---

9. Montrer que la composée de deux applications injectives est injective, et que la composée de deux applications surjectives est surjective.

---

10. Soient E, F deux ensembles, et $f : E \to F$, $g : F \to E$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f = \mathrm{id}_E$, alors f est injective et g est surjective.
2. Montrer que si $f \circ g$ et $g \circ f$ sont toutes les deux bijectives, alors f et g sont bijectives.

---

11. Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications.
On considère $h : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \times G \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array} \right.$

1. Monter que si f **ou** g est injective, alors h est injective.
2. On suppose que h est surjective. Que peut-on dire de f et g ?
3. On suppose que f **et** g sont surjectives. L'application h est-elle nécessairement surjective ?

III. Propriétés des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

12. Répondre, en **justifiant** par une preuve ou un exemple.

1. Une fonction injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut-elle être périodique ?
2. Une fonction impaire peut-elle être injective sur $\mathbb{R}$?
3. Une fonction injective sur $\mathbb{R}$ peut-elle être paire ?
4. Une fonction paire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut-elle être périodique ?
5. Une composée de deux fonctions périodiques est-elle périodique ? Si oui, en donner une période.
6. Une fonction strictement décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut-elle être impaire ?
7. Une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut-elle être paire ?

---

13. Pour chaque fonction, dire si elle minorée, majorée, bornée, paire, impaire.

a) $f : x \mapsto x^2$

b) $g : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

c) $h : x \mapsto \dfrac{1}{1+|x|}$

d) $a : x \mapsto e^{-(x-2)^2}$

e) $b : x \mapsto \cos\left(4x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

f) $c : x \mapsto \sqrt{1+x^2} - |x|$

---

14. Pour chacune des fonctions périodiques suivantes, trouver une période $T \in \mathbb{R}_+^*$ la plus petite possible.

a) $x \mapsto \tan(x)$

b) $x \mapsto \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

c) $x \mapsto \sin(x)\cos(x+1)$

d) $x \mapsto \sin(2x)\left(1 - 2\sin^2(x)\right)$

e) $x \mapsto \dfrac{e^{\lfloor x \rfloor}}{e^x}$

f) $x \mapsto A\cos(\omega x + \varphi)$ avec $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$

---

15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f **tend vers** $+\infty$ **en** $+\infty$ lorsqu'elle vérifie l'assertion suivante : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists r \in \mathbb{R}, \forall x \geq r, f(x) \geq M$.

1. Exprimer avec des quantificateurs les assertions suivantes.

   a) f n'est pas majorée.

   b) f n'est pas décroissante.

   c) f n'est pas impaire.

   d) f ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$.

2. Montrer que si f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, alors f n'est pas majorée.
3. La réciproque est-elle vraie ?
