TD Ch 3 – Vocabulaire des applications
Corrigé

I. Injection, surjection, bijection

1. 1. f est polynomiale de degré 2, donnée sous forme canonique. On sait qu'elle est décroissante jusqu'à $x = -1$, où elle atteint son minimum, qui vaut -3, puis elle est croissante.
Comme $f(1) = f(-3) = 5$ et $f(5) = 29$, le tableau de variation permet directement d'obtenir :

a) $f([1; +\infty[) = [5, +\infty[$ b) $f(\mathbb{R}) = [-3, +\infty[$ c) $f([-3; 5]) = [-3, 29[$

2. f n'est pas injective puisque $f(-3) = f(1)$. Elle n'est pas non plus surjective puisque -4 n'admet pas d'antécédent par f. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = 2(x+1)^2 - 3 \geq 0 - 3$.
Ainsi, f n'est pas bijective.

---

2. $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bien définies, puisque les ensembles d'arrivée de l'une et de départ de l'autre coïncident.
On a : $\forall x \in \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$
et $\forall x \in \mathbb{R}_+, (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = (\sqrt{x})^2 = x$.
Ainsi : $g \circ f : x \in \mathbb{R} \mapsto |x| \in \mathbb{R}$ et $f \circ g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x \in \mathbb{R}_+$.
Enseignement : Même quand la composition a un sens, **on ne peut pas échanger** f et g (ce n'est pas commutatif !). Il faut aussi faire très attention aux ensembles de départ **et d'arrivée**.

---

3. Il faut faire bien attention aux ensembles de départ et d'arrivée !

a) f est injective car strictement croissante, mais non surjective car $-1 \in \mathbb{R}$ n'admet pas d'antécédent par f. Elle n'est donc pas bijective.

b) f est cette fois bijective. Sa réciproque est l'application $f^{-1} : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_+$. On a bien : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x^2} = \sqrt{x}^2 = x$.

c) f est bijective, et sa réciproque est la racine cubique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

d) f est injective car strictement croissante, mais pas surjective car $0 \in \mathbb{R}_+$ n'admet pas d'antécédent par f. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = x + 1 \geq 1$! f n'est donc pas non plus bijective.

e) f est cette fois bijective, avec comme réciproque la fonction $f^{-1} : x \in \mathbb{R} \mapsto x - 1 \in \mathbb{R}$.

f) f est bijective, de réciproque $f^{-1} : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{sqrtx} \in \mathbb{R}_+$.

g) f n'est ni injective ni surjective. En effet, $f(-1) = 1 = f(1)$, et -1 n'a pas d'antécédent par f puisque f est à valeurs positives. Elle n'est donc pas bijective.

h) f est injective car strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, mais pas surjective, puisque -1 n'a toujours pas d'antécédent. Elle n'est donc pas bijective.

i) f est injective (strictement croissante), mais pas surjective : elle n'atteint que les entiers impairs, donc par exemple 0 n'a pas d'antécédent par f. Ainsi, f n'est pas bijective.

---

4. 1. Remarquons déjà que la composée $f \circ f$ a bien un sens.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $(f \circ f)(x, y) = f(f(x, y)) = f(x+y, x-y) = ((x+y) + (x-y)\ ,\ (x+y) - (x-y)) = (2x, 2y) = 2(x, y)$
Ainsi, la fonction $f \circ f$ est la fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 2(x, y) \in \mathbb{R}^2$: il s'agit donc de la fonction $2 \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

2. On a donc $f \circ \frac{1}{2}f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} = \frac{1}{2}f \circ f$.

   L'application f admet donc une réciproque, qui est l'application $f^{-1} = \frac{1}{2}f$. Ainsi, f est bien bijective, de réciproque :
   $f^{-1} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$.

---

5. 1. $1 - 2x = 0 \iff x = \frac{1}{2}$, donc le domaine de définition de f est $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

2. Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a :
   $f(x) = m \iff \frac{x-1}{1-2x} - m = 0 \iff x - 1 = m(1-2x) \iff x + 2mx = m + 1 \iff x(1+2m) = m+1$.
   - Si $m \neq -\frac{1}{2}$, on peut diviser par $1 + 2m$ et obtenir $x = \frac{m+1}{2m+1}$.
   - Si $m = -\frac{1}{2}$, l'équation devient $0 = \frac{1}{2}$, ce qui est impossible, donc il n'y a aucune solution.
   - L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \varnothing$ si $m = -\frac{1}{2}$, et $\mathcal{S}_m = \left\{\frac{m+1}{2m+1}\right\}$ sinon.

3. On en déduit que pour tout $m \in \mathbb{R}$, m admet un unique antécédent par f si $m \neq -\frac{1}{2}$, et m n'admet aucun antécédent si $m = -\frac{1}{2}$.
   Ainsi, l'image directe $f(\mathcal{D})$, c'est à dire l'ensemble des réels qui admettent un antécédent par f, est $f(\mathcal{D}) = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.
   f n'est pas surjective, puisque $-\frac{1}{2}$ est dans l'ensemble d'arrivée (qui est $\mathbb{R}$ selon l'énoncé), mais n'admet pas d'antécédent par f.

4. g est clairement surjective, puisqu'on a restreint l'ensemble d'arrivée à $f(\mathcal{D})$.
   On a montré à la question 2 que tous les réels admettaient au plus un antécédent par f, donc f était injective. Ainsi, g est encore injective ! Finalement, g est bijective.
   De plus, pour $m \in f(\mathcal{D})$, cet unique antécédent est donné par $\frac{m+1}{2m+1}$. On en déduit que l'application réciproque de g est :
   $g^{-1} : m \in f(\mathcal{D}) \mapsto \frac{m+1}{2m+1} \in \mathcal{D}$.

---

6. 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| + 1 \geq 1$ donc $|x| + 1 \neq 0$. Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2. Soit $m \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $f(x) = m \iff x = m|x| + m$
   - Cas 1 : $x \geq 0$, c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}_+$. Alors l'équation se réécrit $x = mx + 1$, ie $x(1-m) = m$.
     Dans ce cas, si $m \neq 1$, on obtient $x = \frac{m}{1-m}$, qui est une solution convenable si et seulement si $\frac{m}{1-m} \in \mathbb{R}_+$, c'est-à-dire lorsque $m \in [0, 1[$.
     Dans les autres cas, la solutions n'est pas convenable, et pour $m = 1$ l'équation devient $0 = 1$.
   - Cas 2 : $x < 0$, c'est-à-dire $x \in]0, +\infty[$. Alors l'équation se réécrit $x = -mx + m$, ie $x(m+1) = m$.
     Dans ce cas, si $m \neq -1$, on obtient $x = \frac{m}{1+m}$, qui est convenable uniquement pour $\frac{m}{m+1} < 0$, c'est-à-dire sur $]-1, 0[$.
     Et de même que pour le cas 1, les autres valeurs de m n'aboutissent à aucune solution.
   - En résumé : $\mathcal{S} = \left\{\frac{m}{1-|m|}\right\}$ si $m \in]-1, 1[$, et $\mathcal{S} = \varnothing$ sinon.

3. On en déduit que tout réel $m \in \mathbb{R}$ admet un antécédent par f si et seulement si $m \in]-1, 1[$, donc $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$. 78 n'admet pas d'antécédent par f, alors que l'ensemble d'arrivée de f est $\mathbb{R}$: f n'est pas surjective.

4. En restreignant l'ensemble d'arrivée à $]-1,1[= f(\mathbb{R})$, l'application g formée est nécessairement surjective.
De plus, chaque réel $m \in f(\mathbb{R})$ admet un unique antécédent, donné par $\dfrac{m}{1-|m|}$, donc l'application g est bien injective, et donc bijective, et sa réciproque est donnée par :
$g^{-1} : x \in]-1,1[\mapsto \dfrac{m}{1-|m|} \in \mathbb{R}$.

II. Exercices théoriques

7. 1. $1^2 = 1$ et $0^2 = 0$, donc pour tout $x \in E$, on a bien $(\mathbb{1}_A(x))^2 = \mathbb{1}_A(x)$.
Ainsi : $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$.

2. On procède par double implication.
   - Supposons d'abord $A \subset B$ et montrons qu'alors $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$.
   Soit $x \in E$.
   Si $x \in A$, comme $A \subset B$, on a en particulier $x \in B$. Alors $\mathbb{1}_A(x) = 1 = \mathbb{1}_B(x)$.
   Si $x \notin A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 0 \leq \mathbb{1}_B(x)$ puisque $\mathbb{1}_B(x) \in \{0,1\}$.
   Dans tous les cas, on a bien $\mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$, et ce pour $x \in E$ quelconque, d'où : $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$. D'où l'implication directe.
   - Supposons désormais que $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$ et montrons qu'alors $A \subset B$.
   Soit $x \in A$. On sait que $\mathbb{1}_A(x) = 1$, donc $\mathbb{1}_B(x) \geq 1$. Ainsi, on a nécessairement $\mathbb{1}_B(x) = 1$, et donc $x \in B$.
   On en déduit que $A \subset B$, ce qui prouve l'implication indirecte.
   - L'équivalence est donc vraie : $A \subset B \iff \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$.

3. $A = B \iff (A \subset B \text{ et } B \subset A) \iff (\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B \text{ et } \mathbb{1}_B \leq \mathbb{1}_A) \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

4. Pour tout $x \in E$, on a $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \overline{A} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbb{1}_A(x) = 0 \\ 0 & \text{si } \mathbb{1}_A(x) = 1 \end{cases} = 1 - \mathbb{1}_A(x)$
Ainsi : $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.
De même, on peut écrire que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$, et que $\mathbb{1}_{A\cup B} = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$.

5. Pour que l'application $\mathbb{1}_A$ soit injective, il faut nécessairement que 0 et 1 aient au plus un antécédent par $\mathbb{1}_A$, et donc qu'il y ait au plus un élément dans A et au plus un élément dans $\overline{A}$.
En particulier, E doit contenir au plus 2 éléments ! Et s'il en contient 2, A doit en contenir exactement 1.

---

8. • On suppose d'abord f injective. Soit $x \in E$. On veut montrer que $f(x) = x$.
On sait que $f(x) = f(f(x))$, donc x et $f(x)$ ont la même image par f. Mais alors, par injectivité de f, on sait que $f(x) = x$.
C'est vrai pour tout $x \in E$, donc on a bien $f = \mathrm{id}_E$.

- On suppose maintenant que f est surjective. Soit $x \in E$. Il s'agit encore de montrer que $f(x) = x$.
On sait que f est surjective, donc il existe $a \in E$ tel que $f(a) = x$.
Alors $f(a) = f(f(a))$ se réécrit $x = f(x)$. C'est vrai pour tout $x \in E$, donc on a encore $f = \mathrm{id}_E$.
- Ainsi, si f est injective ou surjective, on a bien $f = \mathrm{id}_E$.

---

9. Soient E, F, G des ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications, de sorte que la composée $g \circ f : E \to G$ soit bien définie.

- On suppose d'abord que f et g sont injectives. On veut alors montrer que $g \circ f$ est encore injective.
Soient $x, y \in E$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$.
Alors $g(f(x)) = g(f(y))$. Mais alors, par injectivité de g, on a nécessairement $f(x) = f(y)$.
Mais donc, par injectivité de f : $x = y$.
L'application $g \circ f$ est bien injective.

- Supposons désormais que f et g sont surjectives, et montrons que $g \circ f$ l'est alors également.
  Soit $z \in G$. Par surjectivité de g, on dispose de $y \in F$ tel que $g(y) = z$.
  Mais alors par surjectivité de f, on dispose de $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
  On a alors $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, donc z admet bien un antécédent par $g \circ f$.
  Ainsi, $g \circ f$ est bien surjective.
- D'où le résultat : la composée de deux applications injectives (resp. surjectives) est injective (resp. surjective).

---

10. 1. On suppose que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
   - Montrons d'abord que f est injective. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$.
     Alors $x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$, et donc $x = y$.
     D'où l'injectivité de f.
   - Montrons que g est surjective. Soit $y \in E$.
     On sait que $y = g(f(y))$, donc $f(y)$ est un antécédent de y par g !
     D'où la surjectivité de g.
   - On a bien prouvé que si $g \circ f = \mathrm{id}_E$, alors f est injective et g est surjective.

2. On suppose que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont toutes les deux bijectives.
   Alors il existe $h : E \to E$, la réciproque de $f \circ g$, qui vérifie $f \circ g \circ h = h \circ f \circ g = id_E$.
   Comme $f \circ (g \circ h) = id_E$, d'après la question 1, f est nécessairement surjective.
   Comme $(h \circ f) \circ g = id_E$, d'après la question 1, g est injective.
   De même, en posant $a : E \to E$ la réciproque de $g \circ f$, on a $(a \circ g) \circ f = id_E = g \circ (f \circ a)$, et donc f est injective et g est surjective.
   f est injective et surjective donc elle est bijective. De même pour g.
   Ainsi, si $f \circ g$ et $g \circ f$ sont toutes les deux bijectives, alors f et g sont bien bijectives.

---

11. 1. On suppose f injective. Montrons que h est injective. Soient $x, y \in E$ tels que $h(x) = h(y)$, c'est-à-dire $(f(x), g(x)) = (f(y), g(y))$.
   Alors $f(x) = f(y)$ et $g(x) = g(y)$.
   La première égalité donne, par injectivité de f : $x = y$.
   D'où l'injectivité de f.
   La preuve est exactement la même si g est injective, en utilisant la deuxième égalité.
   Ainsi, si f ou g est injective, alors h aussi.

2. Supposons h surjective, et montrons qu'alors f et g sont aussi surjectives.
   Soit $y \in F$ et $z \in G$. On sait que le couple $(y, z) \in F \times G$ admet un antécédent par h, donc qu'il existe $x \in E$ tel que $(f(x), g(x)) = (y, z)$.
   On a bien $f(x) = y$ et $g(x) = z$, donc y admet un antécédent par f et z admet un antécédent par g.
   D'où la surjectivité de f et de g.

3. On peut avoir f et g surjectives **sans que** h soit surjective !
   Par exemple, $f = g = id_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire $f, g : x \in \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R}$, f et g sont bien surjectives. Mais alors toutes les images par h sont les couples (x, x) avec $x \in \mathbb{R}$, donc par exemple le couple $(0, 1)$ n'a pas d'antécédent par h !

III. Propriétés des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

12. 1. Non. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injective. Alors pour tout $T \in \mathbb{R}^*$, on a $f(T) \neq f(0)$ (par injectivité), et donc f n'est pas T-périodique. Ainsi, f ne peut pas être périodique.

2. Oui. Par exemple la fonction $f : x \mapsto x$ est impaire et injective sur $\mathbb{R}$.

3. Non. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injective. Alors $f(1) \neq f(-1)$, par injectivité. Mais alors f n'est pas paire !

4. Oui. Par exemple la fonction cosinus !

5. Oui. Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f est T-périodique avec $T \in \mathbb{R}^*$, alors $g \circ f$ est encore T-périodique. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x+T) = g(f(x+T)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, par périodicité de f.
   NB : pas besoin que g soit périodique !
6. Oui. Par exemple la fonction $x \mapsto -x$.
7. Oui ! Par exemple la fonction constante égale à 0. En fait, les constantes sont les seules fonctions convenables !

---

13. On fait la preuve seulement pour les deux premières, et seules les réponses sont données pour les autres.

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, donc f est minorée par 0. Par contre, elle n'est pas majorée. En effet, soit $M \in \mathbb{R}$. Si $M \leq 1$, alors $f(2) = 4 > M$ donc M ne majore pas f. Si $M > 1$, alors $f(M) = M^2 > M$, donc M ne majore pas f.
   Ainsi, f n'est pas bornée.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, donc f est paire.
   Enfin, f n'est pas impaire car $f(-1) \neq -f(1)$.

b) On a $g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $g(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$, donc g n'est ni majorée ni minorée. En particulier elle n'est pas bornée.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = -g(x)$, donc g est impaire.
   Comme $g(1) > 0 > g(-1) = -g(1)$, g n'est pas paire.

c) h est paire (pas impaire). Elle est bornée : minorée par 0 et majorée par 1.

d) a n'est ni paire ni impaire : $a(0) \neq 0$ et $a(2) \neq a(-2)$.
   Elle est bornée : minorée par 0 et majorée par 1.

e) b est bornée par -1 et 1. Elle impaire puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $b(x) = -\sin(4x)$.

f) c est paire, minorée par 0 et majorée par 1.
   En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{x^2} = |x|$, et donc $c(x) = \sqrt{1+x^2} - |x| \geq 0$.
   De plus $c(x) \times (\sqrt{1+x^2} + |x|) = 1 + x^2 - x^2 = 1$, et donc $c(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2} + |x|}$.
   Comme $\sqrt{1+x^2} + |x| \geq \sqrt{1} = 0 = 1$, on en déduit que $c(x) \leq 1$.

---

14. Les périodes suivantes conviennent. Il n'en existe pas de plus petite, mais c'est très difficile à montrer !

a) π b) $\dfrac{2\pi}{3}$ c) π

d) $\dfrac{\pi}{2}$: on peut remarquer que $f(x) = \dfrac{\sin(4x)}{2}$. e) 1

f) $\dfrac{2\pi}{\omega}$ si $\omega \neq 0$, et sinon fonction constante.

---

15. 1. On a les assertions suivantes :

a) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > M$
b) $\exists x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y \text{ et } f(x) < f(y))$
c) $\exists x \in \mathbb{R}, f(-x) \neq -f(x)$.
d) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{R}, \exists x \geq r, f(x) < M$.

2. On suppose que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. D'après la question précédente, on veut montrer l'assertion : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > M$.
   Soit $M+1 \in \mathbb{R}$. On sait qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq r$, on ait $f(x) \geq M+1$. En particulier, comme $r \geq r$, on a $f(r) \geq M+1$.
   On a bien trouvé un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > M$, en prenant $x = r$!
   C'est vrai pour tout $M \in \mathbb{R}$, donc on a bien : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > M$. Donc f n'est pas majorée.
3. La réciproque est fausse, on peut avoir une fonction non majorée mais qui ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$. Par exemple la fonction $x \mapsto e^{-x}$!
