

TD Ch 3 – Vocabulaire des applications

I. Injection, surjection, bijection

1. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$.

1. Déterminer les images directes suivantes :

a) $f([1; +\infty[)$

b) $f(\mathbb{R})$

c) $f([-3; 5])$

2. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

2. On considère $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}^+$ et $g : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$.

Expliciter $g \circ f$ et $f \circ g$. Quel enseignement peut-on en tirer ?

3. Pour chacune des applications suivantes, étudier son injectivité, sa surjectivité, sa bijectivité. Lorsqu'elle est surjective, déterminer son application réciproque.

a) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$

b) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$

c) $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases}$

d) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x+1 \end{cases}$

e) $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x+1 \end{cases}$

f) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^4 \end{cases}$

g) $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{cases}$

h) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{cases}$

i) $f : \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto 2n+1 \end{cases}$

4. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x+y, x-y) \end{cases}$

1. Montrer que $f \circ f = 2 \times \text{id}_{\mathbb{R}^2}$.

2. Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.

5. Soit f une fonction définie par l'expression : $f(x) = \frac{x-1}{1-2x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f , noté $\mathcal{D}$ dans la suite.

2. Résoudre l'équation à paramètre $f(x) = m$, de paramètre $m \in \mathbb{R}$ et d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3. En déduire $f(\mathcal{D})$. L'application $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle surjective ?

4. On considère la restriction $g : \begin{cases} \mathcal{D} \rightarrow f(\mathcal{D}) \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$. Montrer à l'aide de la question 2 que g est bijective, et expliciter son application réciproque.

6. Même exercice que le précédent, avec $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x}{|x|+1} \in \mathbb{R}$.

II. Exercices théoriques

7. Soit E un ensemble. On rappelle que pour tout $A \subset E$, la fonction caractéristique de A (dans E), notée $\mathbb{1}_A$, est l'application qui à x dans E associe 1 si $x \in A$ et 0 sinon. On se fixe A et B deux parties quelconques de E .

1. Montrer que $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$.
 2. Montrer que $A \subset B \iff \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$.
 3. En déduire que $A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.
 4. Exprimer en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ les fonctions suivantes : $\mathbb{1}_{\overline{A}}$, $\mathbb{1}_{A \cap B}$ et $\mathbb{1}_{A \cup B}$.
 5. Dans quels cas l'application $\mathbb{1}_A$ est-elle injective ?
-

8. Soit E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f \circ f = f$. Montrer que si f est injective ou surjective, alors $f = \text{id}_E$.

9. Montrer que la composée de deux applications injectives est injective, et que la composée de deux applications surjectives est surjective.

10. Soient E, F deux ensembles, et $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow E$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f = \text{id}_E$, alors f est injective et g est surjective.
 2. Montrer que si $f \circ g$ et $g \circ f$ sont toutes les deux bijectives, alors f et g sont bijectives.
-

11. Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $g : E \rightarrow G$ deux applications.

On considère $h : \begin{cases} E & \rightarrow & F \times G \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{cases}$

1. Montrer que si f **ou** g est injective, alors h est injective.
 2. On suppose que h est surjective. Que peut-on dire de f et g ?
 3. On suppose que f **et** g sont surjectives. L'application h est-elle nécessairement surjective ?
-

III. Propriétés des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

12. 1. Une fonction injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut-elle être périodique ?

2. Une fonction impaire peut-elle être injective sur $\mathbb{R}$?
 3. Une fonction injective sur $\mathbb{R}$ peut-elle être paire ?
 4. Une fonction paire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut-elle être périodique ?
 5. Une composée de deux fonctions périodiques est-elle périodique ? Si oui, en donner une période.
 6. Une fonction strictement décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut-elle être impaire ?
 7. Une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut-elle être paire ?
-

13. Pour chaque fonction, dire si elle minorée, majorée, bornée, paire, impaire.

- | | | |
|-----------------------------|--|-------------------------------------|
| a) $x \mapsto x^2$ | b) $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ | c) $x \mapsto \frac{1}{1 + x }$ |
| d) $x \mapsto e^{-(x-2)^2}$ | e) $x \mapsto \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$ | f) $x \mapsto \sqrt{1 + x^2} - x $ |
-

14. Pour chacune des fonctions périodiques suivantes, trouver une période $T \in \mathbb{R}_+^*$ la plus petite possible.

a) $x \mapsto \tan(x)$

b) $x \mapsto \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

c) $x \mapsto \sin(x) \cos(x+1)$

d) $x \mapsto \sin(2x) (1 - 2 \sin^2(x))$

e) $x \mapsto \frac{e^{\lfloor x \rfloor}}{e^x}$

f) $x \mapsto A \cos(\omega x + \varphi)$ avec $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$

15. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f **tend vers** $+\infty$ **en** $+\infty$ lorsqu'elle vérifie l'assertion suivante : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists r \in \mathbb{R}, \forall x \geq r, f(x) \geq M$.

1. Exprimer avec des quantificateurs les assertions suivantes.

a) f n'est pas majorée.

b) f n'est pas décroissante.

c) f n'est pas impaire.

d) f ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$.

2. Montrer que si f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, alors f n'est pas majorée.

3. La réciproque est-elle vraie ? On pourra tracer l'allure d'un contre-exemple.