TD Ch 4 – Études de fonctions et fonctions usuelles

I. Domaine de définition

1. Pour chaque fonction : déterminer son domaine de définition et préciser, à l'aide des symétries et périodicités, le domaine sur lequel il suffit de l'étudier.

$f_1 : x \mapsto e^x \ln(x+5)$ $\quad f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x - \frac{1}{x}}$ $\quad f_3 : x \mapsto \sqrt{2x^4 - 3x^2 - 2}$

$f_4 : x \mapsto \ln(|x|)$ $\quad f_5 : x \mapsto \sin^2(x)\cos(x)$ $\quad f_6 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

$f_7 : x \mapsto \ln\left(\sqrt{3}\sin(x) - \cos(x)\right)$ $\quad f_8 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x(x-1)}}{x^2-4}$ $\quad f_9 : x \mapsto \dfrac{1}{(x^3-2x)^2} \times \dfrac{x^4}{\sqrt{x^2+2}}$

f_{10}: $x \mapsto \ln(x^9+1)$ $\quad f_{11}$: $x \mapsto \sin(\omega x)$ où $\omega \in \mathbb{R}$

---

2. Pour chaque expression, donner son domaine de définition et la simplifier au maximum :

a) $f(x) = x\ln\left(\sqrt{e^{\frac{x}{2}}}\right) + \left(\sqrt{e^{2\ln(2x-1)}}\right)^3$ $\quad$ b) $g(x) = e^{\sqrt{\ln(x)}} + e^{\ln(x)^2}$

II. Dérivée

3. Étudier le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$g_1 : x \mapsto 1 + \ln(x)$ $\quad g_2 : x \mapsto e^x \ln(x+5)$ $\quad g_3 : x \mapsto x^2 e^{-\frac{1}{x}}$

$g_4 : x \mapsto \sqrt{e^x}$ $\quad g_5 : x \mapsto e^{x\cos(x)}$ $\quad g_6 : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$

$g_7 : x \mapsto \cos\left(e^{2x}\right)$ $\quad g_8 : x \mapsto \ln(e^x + x^2)$ $\quad g_9 : x \mapsto \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{x^2-1}$

g_{10}: $x \mapsto \ln(\ln(x))$ $\quad g_{11}$: $x \mapsto \ln\left(2x - \dfrac{3}{x}\right)$ $\quad g_{12}$: $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

g_{13}: $x \mapsto \dfrac{1+x}{1+e^x} - x$ $\quad g_{14}$: $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}}{(x^2+x+1)^3}$ $\quad g_{15}$: $x \mapsto \sin(\ln(2x+7))$

g_{16}: $x \mapsto \dfrac{1}{(\cos(x))^4}$ $\quad g_{17}$: $x \mapsto \dfrac{\tan(x)}{(3+\cos^2(x))^3}$ $\quad g_{18}$: $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{9x^2-4}}\right)$

---

4. Déterminer le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$h_1 : x \mapsto \dfrac{\ln(|x^2-1|)}{x}$ $\quad h_2 : x \mapsto \lfloor\cos(x)\rfloor$ $\quad h_3 : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{|e^x-1|+1}}$

III. Limites

5. Calculer les limites suivantes. :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x-2}}$ $\quad$ b) $\lim\limits_{x\to2^+} e^{\frac{1}{x-2}}$ $\quad$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 10x\sqrt{x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^7+4x^2-1}{x^9+1}$ $\quad$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^7-3x^3+2x}{2x^6-3}$ $\quad$ f) $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x^4-3x^2+x}{x^6+4x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{3x^2+2x-5}{x^2+4x-5}$ $\quad$ h) $\lim\limits_{x\to-5^+} \dfrac{3x^2+2x-5}{x^2+4x-5}$ $\quad$ i) $\lim\limits_{s} x \to 0 \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$

6. Calculer les limites des fonctions suivantes aux bornes de leur domaine de définition. On donnera les asymptotes obtenues le cas échéant.

$f_1 : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{x^2+x-2}$ $\quad f_2 : x \mapsto \dfrac{2x-1}{4-9x^2}$ $\quad f_3 : x \mapsto e^{x^2} - e^{x+1}$

$f_4 : x \mapsto x^2 - 3x + 1 - x|x-3|$ $\quad f_5 : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}\, e^{\frac{1}{x}}$ $\quad f_6 : x \mapsto \left(\sqrt{2x-1}\right) e^{\frac{1}{x^2-2}}$

IV. Fonctions puissances

7. Pour chaque fonction, donner son domaine de définition, de dérivabilité et l'expression de sa dérivée. Pour les quatre premières, on demande aussi de tracer l'allure du graphe.

$g_1 : x \mapsto \pi^x$ $\quad g_2 : x \mapsto x^{-\sqrt{7}}$ $\quad g_3 : x \mapsto \sqrt{x}^{\sqrt{2}}$

$g_4 : x \mapsto \dfrac{1}{3^{x+1}}$ $\quad g_5 : x \mapsto 2^{\ln(x)}$ $\quad g_6 : x \mapsto \left(e^{2x}-1\right)^{\pi}$

8. Soient $a, d \in \mathbb{R}_+^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$.
Parmi les formules suivantes, lesquelles sont exactes ? Justifier en revenant à la définition ou en fournissant un contre-exemple, le cas échéant.

a) $(a^b)^c = a^{bc}$ $\quad$ b) $a^b a^c = a^{bc}$ $\quad$ c) $a^{d^c} = (a^d)^c$ $\quad$ d) $a^{2b} = (a^b)^2$

e) $a^b + a^c = a^{b+c}$ $\quad$ f) $(a+d)^b = a^b + d^b$ $\quad$ g) $(a^c)^d = (a^d)^c$ $\quad$ h) $(ad)^c = a^{\frac{c}{2}} d^{\frac{c}{2}}$

9. Soit $x > 0$. On pose $a = e^{x^2}$ et $b = \dfrac{1}{x} \ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)$.
Simplifier l'expression a^b.

10. Étudier la fonction f définie par l'expression $f(x) = x^x$.

V. Études de fonctions et tracé de graphes

11. Tracer **directement** le graphe des fonctions suivantes sur leur domaine de définition, **sans les étudier**.

a) $f(x) = 3\cos(x) + 2$ $\quad$ b) $f(x) = \ln(2x) + 1$ $\quad$ c) $f(x) = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ $\quad$ d) $f(x) = -|x+5|$

12. Déterminer (lorsqu'ils existent) les bornes supérieures et inférieures, et les extrema (globaux) des fonctions suivantes.

a) $f : x \in [0, +\infty[\mapsto \dfrac{1}{x+1}$ $\quad$ b) $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{x} - x$

c) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x) + \sin(x)$ $\quad$ d) $f : x \in [1, +\infty[\mapsto \dfrac{1}{2 + \ln(x)}$

13. On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par l'expression : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

1. Étudier la fonction f et représenter son graphe.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de l'équation : $a^b = b^a$.
3. Qui est le plus grand, entre π^e et e^π ?

4. Déterminer en fonction du paramètre $n \in \mathbb{Z}$ le nombre de solutions (dans $\mathbb{R}_+^*$) de l'équation $e^x = x^n$
5. Que vaut $\sup\left\{n^{\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$? Cette borne supérieure est-elle un maximum ?

---

14. Tracer le graphe des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

a) $f : x \mapsto e^{|\ln(|x|)|}$ b) $f : x \mapsto |2x-3| + |x-5|$

---

15. Étudier complètement chacune des fonctions suivantes, et tracer son graphe le plus précisément possible.

a) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-\ln(x)}}$ b) $f : x \mapsto \dfrac{x^2-2}{(x-1)^2}$ c) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$

d) $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$ e) $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ f) $f : x \mapsto 3\cos(x) - \cos(3x)$

g) $f : x \mapsto x^2 e^{-x^2}$ h) $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$ i) $f : x \mapsto (2x^2-4x+5)e^x - xe^{x^2}$

---

16. Soit f définie par l'expression : $f(x) = \ln(|\sin x \cos x|)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est paire et $\dfrac{\pi}{2}$-périodique. À quel domaine peut-on restreindre l'étude de la fonction f ?
3. Montrer que f est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, et déterminer sa dérivée. En déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.
4. Tracer le graphe de f.

---

17. Dans cette exercice, on cherche à étudier les fonctions de la forme

$$f_a(x) = (x-a)^x \quad \text{où } a \in \mathbb{R}_+$$

I : Cas a=0

1. Étudier la fonction $f_0(x) = x^x$: domaine de définition, variations, limites, allure de la courbe.

II : Cas a>0

2. Déterminer le domaine D_a de définition de f_a
3. Calculer les limites aux bornes de ce domaine.
4. Calculer f_a'.
5. On pose sur D_a, $g_a(x) = \ln(x-a) + \dfrac{x}{x-a}$.
   (a) Dresser le tableau de variations de g_a et montrer qu'elle admet un minimum noté m.
   (b) Pour quelle valeur α de a ce minimum est il nul ?
   (c) Montrer que si $a > \alpha$ ou $a = \alpha$, alors f_a est strictement croissante
   (d) On suppose $a \in]0, \alpha[$, montrer que f_a' s'annule en deux points x_1, x_2 vérifiant $a < x_1 < 2a < x_2$. (on ne cherchera pas à calculer les valeurs exactes de x_1 et x_2.) Donner alors le tableau de variations de f_a.
6. Étudier les position relatives des différentes courbes f_a.
7. Tracer sur le même graphique qu'en partie I la courbe représentative de f_1.
