TD Ch 4 – Études de fonctions et fonctions usuelles
Corrigé

I. Domaine de définition

1. On ne détaille que pour les premiers. Pour la suite, seules les réponses sont données.

a) $x+5>0 \iff x>-5$, donc le domaine de définition de f_1 est $\mathcal{D}=]-5,+\infty[$.
Cette fonction n'est ni paire, ni impaire ni périodique, donc on l'étudie sur $\mathcal{D}$ tout entier.

b) On doit avoir $x\neq 0$. De plus, pour $x\in\mathbb{R}^*$, on a : $x-\dfrac{1}{x}=0 \iff \dfrac{x^2-1}{x}=0 \iff \dfrac{(x-1)(x+1)}{x}=0 \iff (x=-1 \text{ ou } x=1)$.
Ainsi, le domaine de définition de f_2 est $\mathcal{D}=\mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$.
Ce domaine est symétrique par rapport à 0, et pour tout $x\in\mathcal{D}$, on a :
$f_2(-x)=\dfrac{1}{-x+\frac{1}{x}}=-\dfrac{1}{x-\frac{1}{x}}=-f_2(-x)$. Ainsi, f_2 est impaire.
Il suffit donc d'étudier f_2 sur le domaine d'étude $\mathcal{D}_{et}=]0,1[\cup]1,+\infty[$.

c) On a $2x^4-3x^2-2\geq 0 \iff 2y^2-3y-2\geq 0$ où $y=x^2\in\mathbb{R}_+$.
On obtient $y\in]-\infty,-\frac{1}{2}]\cup[2,+\infty[$, c'est-à-dire $x^2\in[2,+\infty[$, et donc $x\in]-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty[$.
D'où finalement le domaine d'étude : $\mathcal{D}=]-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty[$.
f_3 est clairement paire, donc on peut se restreindre au domaine d'étude $\mathcal{D}_{et}=[\sqrt{2},+\infty[$.

d) $\mathcal{D}=\mathbb{R}^*$, et f_4 est paire donc $\mathcal{D}_{et}=\mathbb{R}_+^*$.

e) $\mathcal{D}=\mathbb{R}$, et f_5 est paire et 2π-périodique donc on peut restreindre l'étude à $[-\pi,\pi]$ puis à $[0,\pi]$. $\mathcal{D}_{et}=[0,\pi]$.

f) $\mathcal{D}=]-1,1[$, et f_6 est impaire donc $\mathcal{D}_{et}=[0,1[$.

g) $f_7(x)=\ln\left(\cos\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$. On obtient pour domaine de définition :
$\mathcal{D}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi\right[$. Par 2π-périodicité, $\mathcal{D}_{et}=\left]\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right[$.

h) $\mathcal{D}=]-\infty,2[\cup]-2,0[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[=\mathcal{D}_{et}$ (pas de bonne propriété)

i) $\mathcal{D}=\mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$. f_9 est paire, $\mathcal{D}_{et}=]0,\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},+\infty[$.

j) $\mathcal{D}=]-1,+\infty[=\mathcal{D}_{et}$.

k) $\mathcal{D}=\mathbb{R}$, $\mathcal{D}_{et}=\left[0,\dfrac{\pi}{|\omega|}\right]$ si $\omega\neq 0$, par imparité et périodicité de période $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.
Si $\omega=0$, on a la fonctions constante nulle.

2.
a) $\mathcal{D}_f=\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ puisque la seule contrainte qui n'est pas immédiatement vraie est $2x-1>0$.
Pour tout $x\in\mathcal{D}_f$, on a $f(x)=x\times\dfrac{1}{2}\ln\left(e^{\frac{x}{2}}\right)+\left(e^{\ln(2x-1)}\right)^3=\dfrac{x}{2}\times\dfrac{x}{2}+(2x-1)^3=\dfrac{x^2}{4}+(2x-1)^3$.

b) $\mathcal{D}_g=[1,+\infty[$ puisqu'on doit avoir $x>0$ et $\ln(x)\geq 0$.
Piège : g ne peut pas se simplifier plus !

II. Dérivée

3. On ne détaille que certaines questions dans ce corrigé, seule la réponse est donnée pour le reste.

g_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, comme somme d'une fonction constante et du logarithme népérien, qui sont dérivables sur ce domaine.
Expression de sa dérivée : $\dfrac{1}{x}$.

g_2 . On sait que $x \mapsto \ln(x+5)$ est définie et dérivable sur $]-5,+\infty[$, puisque sur ce domaine, $x+5 \in \mathbb{R}_+^*$ et ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par multiplication avec la fonction exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$, on obtient que la fonction est définie et dérivable sur $]-5,+\infty[$.
Expression de sa dérivée : $e^x \times 1 \times \dfrac{1}{x+5} + e^x \times \ln(x+5) = e^x \left(\dfrac{1}{x+5} + \ln(x+5)\right)$.

g_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Expression de sa dérivée : $2x \times e^{-\frac{1}{x}} + x^2 \times \dfrac{1}{x^2} \times e^{-\frac{1}{x}} = (2x+1)e^{-\frac{1}{x}}$.

g_4 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Expression de sa dérivée : $e^x \times \dfrac{1}{2\sqrt{e^x}} = \dfrac{\sqrt{e^x}}{2}$.

g_5 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Expression de sa dérivée : $(\cos(x) - x\sin(x))\, e^{x\cos(x)}$.

g_6 est définie et dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Expression de sa dérivée : $\dfrac{\ln(x)-1}{\ln(x)^2}$.

g_7 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Expression de sa dérivée : $(\cos(x) - x\sin(x))\, e^{x\cos(x)}$.

g_8 est définie et dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Expression de sa dérivée : $\dfrac{\ln(x)-1}{\ln(x)^2}$.

g_9 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Expression de sa dérivée : $-2e^{2x}\sin\left(e^{2x}\right)$.

g_{10}est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Expression de sa dérivée : $\dfrac{e^x+2x}{e^x+x^2}$.

g_{11}est définie et dérivable sur $\left]-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right[\cup \left]\sqrt{\frac{3}{2}},+\infty\right[$.
Expression de sa dérivée : $\left(2+\dfrac{3}{x^2}\right)\dfrac{1}{2x-\frac{3}{x}} = \dfrac{2x^2+3}{x(2x^2-3)}$.

g_{12}est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Expression de sa dérivée : $\dfrac{\cos(x)\sqrt{x^2+1} - 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \times \sin(x)}{\sqrt{x^2+1}^2} = \dfrac{1}{x^2+1}\left(\cos(x)\sqrt{x^2+1} - \sin(x)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

g_{13}est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Expression de sa dérivée : $\dfrac{1-xe^x}{(1+e^x)^2} - 1$.

g_{14}est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. Expression de sa dérivée : $\dfrac{e^{\frac{x}{2}}\left(x^2-4x-1\right)}{2\left(x^2-1\right)^2}$.

g_{15}est définie et dérivable sur $]1,+\infty[$. Expression de sa dérivée : $\dfrac{1}{x\ln(x)}$.

g_{16}est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$. Expression de sa dérivée : $\dfrac{\frac{x^2+x+1}{2\sqrt{x+1}} - 3(2x+1)}{(x^2+x+1)^4}$.

g_{17}est définie et dérivable sur $\left]-\dfrac{7}{2},+\infty\right[$. Expression de sa dérivée : $\dfrac{2}{2x+7}\cos\left(\ln(2x+7)\right)$.

g_{18}est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. Expression de sa dérivée : $\dfrac{4\sin(x)}{(\cos(x))^5}$.

g_{19}est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. Expression de sa dérivée : $\dfrac{1}{(3+\cos^2(x))^4}\left(4+3\tan^2(x)+6\sin(\right.$

g_{20}est définie et dérivable sur $\left]-2,-\frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{2}{3},+\infty\right[$. Expression de sa dérivée : $\frac{1}{x+2}-\frac{9x}{9x^2-4}$.

---

4. f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$ puisque sur ce domaine, $x^2-1\neq 0$ donc $x\mapsto |x^2-1|$ est dérivable, puis $|x^2-1|>0$ donc $x\mapsto \ln(|x^2-1|)$ est encore dérivable, et en divisant par $x\neq 0$, cela reste dérivable.
Expression de sa dérivée : $\frac{2}{x^2-1}-\frac{\ln(|x^2-1|)}{x^2}$.

h_2 est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable pour tous les $x\in\mathbb{R}$ qui vérifient $\cos(x)\notin\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $\cos(x)\in\left]-1,0\right[\cup\left]0,1\right[$.
Ainsi, elle est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{k\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, et la dérivée est nulle en ces points.

h_3 est définie sur $\mathbb{R}$, et dérivable dès que $e^x-1\neq 0$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}^*$.
Expression de sa dérivée :

- Si $x>0$, on a $|e^x-1|+1=e^x$, donc on obtient comme dérivée $\left(1-\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$.
- Si $x<0$o on a $|e^x-1|+1=2-e^x$, donc on obtient comme dérivée $\frac{\sqrt{2-e^x}+\frac{xe^x}{2\sqrt{2-e^x}}}{2-e^x}=\frac{1}{\sqrt{2-e^x}}\left(1+\frac{xe^x}{2-e^x}\right)$.

III. Limites

5. Rappel des méthodes :

- Regarder les limites petit bout par petit bout, et tenter de conclure à l'aide des opérations sur les limites.
- Face à une forme indéterminée, il faut **factoriser par le terme dominant**.
- Attention ! En $\pm\infty$, il s'agit du terme de plus haut degré, mais en 0, le terme dominant est celui de plus bas degré !
- En $l\in\mathbb{R}^*$, face à une forme indéterminée du style "$\frac{l}{0}$", on fait apparaître les factorisations par $(x-l)$

a) Par opérations sur les limites, on sait que $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-2}=0$. Ainsi, en composant avec la fonction continue exponentielle, qui vérifie $e^0=1$, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x-2}}=1}$.

b) Par opérations sur les limites, on sait que $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$. Ainsi, en composant avec la fonction exponentielle, qui vérifie $e^y\underset{y\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x\to2^+}e^{\frac{1}{x-2}}=+\infty}$.

c) Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a $x^2-10x\sqrt{x}=x^2\left(1-\frac{10}{\sqrt{x}}\right)$.
Or, par opérations sur les limites, on sait que $1-\frac{10}{\sqrt{x}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1-0=1$.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$. Ainsi, par produit, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-10x\sqrt{x}=+\infty}$.

d) Pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a : $\frac{x^7+4x^2-1}{x^9+1}=\frac{x^7\left(1+\frac{4}{x^5}-\frac{1}{x^7}\right)}{x^9\left(1+\frac{1}{x^9}\right)}=\frac{1}{x^2}\frac{1+\frac{4}{x^5}-\frac{1}{x^7}}{1+\frac{1}{x^9}}$.
Or, par opérations sur les limites, on a $\frac{1+\frac{4}{x^5}-\frac{1}{x^7}}{1+\frac{1}{x^9}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$.
Comme $\frac{1}{x^2}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$, par produit, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^7+4x^2-1}{x^9+1}=0}$.

e) Pour x dans $]-\infty,-2[$ (par exemple…), en factorisant par les termes dominants, on obtient : $\dfrac{x^7-3x^3+2x}{2x^6-3} = \dfrac{x}{2}\dfrac{1-\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^6}}{1-\frac{3}{2x^6}}$.

Ainsi, par opérations sur les limites, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^7-3x^3+2x}{2x^6-3} = -\infty}$.

f) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\dfrac{x^4-3x^2+x}{x^6+4x^2} = \dfrac{x(x^3-3x+1)}{x^2(x^4+4)} = \dfrac{1}{x}\dfrac{1-3x+x^3}{4+x^4}$.

Or par opérations sur les limites : $\dfrac{1-3x+x^3}{4+x^4} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4}$.

De plus, on sait que $\dfrac{1}{x} \underset{x\to0^-}{\longrightarrow} -\infty$. Ainsi, par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x^4-3x^2+x}{x^6+4x^2} = -\infty}$.

g) On a une forme indéterminée, due au fait que 1 est racine du dénominateur, et du numérateur aussi !

On obtient la factorisation : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-5,1\}$, $\dfrac{3x^2+2x-5}{x^2+4x-5} = \dfrac{(3x+5)(x-1)}{(x-1)(x+5)} = \dfrac{(3x+5)}{x+5} \underset{x\to1}{\longrightarrow} \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$.

Ainsi : $\boxed{\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{3x^2+2x-5}{x^2+4x-5} = \dfrac{4}{3}}$.

h) On utilise la même factorisation. On sait que $3x+5 \underset{x\to-5}{\longrightarrow} -10$ et que $\dfrac{1}{x+5} \underset{x\to-5^+}{\longrightarrow} +\infty$, donc par produit :

$\boxed{\lim\limits_{x\to-5^+} \dfrac{3x^2+2x-5}{x^2+4x-5} = -\infty}$.

i) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ -1 & \text{si } x<0 \end{cases}$.

Ainsi, les limites à gauche et à droite en 0 différent ! On a : $\boxed{\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = -1 \text{ et } \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = 1}$.

Comme ces limites diffèrent, l'expression n'admet $\boxed{\textbf{pas de limite globale en } 0}$.

---

6. On donne seulement les résultats, et pas les détails des calculs de limites.

a) f_1 est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$. On cherche donc les limites en $\pm\infty$, en $-2^\pm$ et en $1^\pm$: il y a 6 limites à calculer.

- En factorisant par le terme dominant ($-x^2$ au numérateur et x^2 au dénominateur), on obtient : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_1(x) = -1$. Ceci correspond à une asymptote horizontale d'équation $y=-1$ en plus et moins l'infini.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$, on peut écrire $f_1(x) = \dfrac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{-(x+1)}{x+2}$. Cela permet d'obtenir les limites suivantes :
  $\lim\limits_{x\to1} f_1(x) = -\dfrac{2}{3}$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f_1(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f_1(x) = +\infty$.
  Il n'y a donc pas d'asymptote en 1 (on a un "prolongement par continuité" possible), mais une asymptote verticale en -2, d'équation $x=-2$.

b) f_2 est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right\}$. On cherche donc les limites en $\pm\infty$, en $\left(-\frac{2}{3}\right)^{\pm}$ et en $\left(\frac{2}{3}\right)^{\pm}$.

- En factorisant par le terme dominant, on obtient : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_2(x) = 0$. Ceci correspond à une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en plus et moins l'infini.
- On écrit $f_2(x) = \dfrac{2x-1}{-9\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)}$, pour obtenir :
  $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{2}{3}\right)^-} f_1(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{2}{3}\right)^+} f_1(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^-} f_1(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^+} f_1(x) = -\infty$.
  On a donc deux asymptotes verticales, d'équations $x = -\dfrac{2}{3}$ et $x = \dfrac{2}{3}$.

c) f_3 est définie sur $\mathbb{R}$, donc seules les limites en $\pm\infty$ sont à déterminer. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on écrit :
$f_3(x) = e^{x^2}\left(1 - \dfrac{e^{x+1}}{e^{x^2}}\right) = e^{x^2}\left(1 - e^{x+1-x^2}\right)$.
Or on sait que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x + 1 - x^2 = \lim\limits_{x\to\pm\infty} -x^2 = -\infty$.
Ainsi, en composant avec la fonction exponentielle qui vérifie $e^y \underset{y\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient que $e^{x+1-x^2} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc par somme : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1 - e^{x+1-x^2} = 1$.
Enfin, par composition à nouveau, on sait que $e^{x^2} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_3(x) = +\infty}$.

d) Encore une fois, f_4 est définie sur $\mathbb{R}$, donc on détermine les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

- Pour $x \in [3,+\infty[$, on a $f_4(x) = x^2 - 3x + 1 - x(x-3) = x^2 - 3x + 1 - x^2 + 3x = 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
  Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) = 1$. Ceci correspond à une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.
- Pour $x \in]-\infty,3[$, on a $f_4(x) = x^2 - 3x + 1 - x(3-x) = x^2 - 3x + 1 - 3x + x^2 = 2x^2 - 6x + 1$.
  Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_4(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 - 6x + 1 = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty$.

e) f_5 est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, donc on doit calculer les limites en $\pm\infty$, en $0^{\pm}$ et en $1\pm$.

- En $\pm\infty$, on sait que $\dfrac{x}{x-1}$ tend vers 1 et que $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers $e^0 = 1$, donc par produit : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_5(x) = 1$.
  Ceci correspond à une asymptote horizontale à la courbe, d'équation $y = 1$.
- En $1^{\pm}$, les opérations sur les limites permettent de conclure que $\lim\limits_{x\to1^-} f_5(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f_5(x) = +\infty$.
  On a donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$.
- En 0^-, par composition et opérations : $\lim\limits_{x\to0^-} f_5(x) = \dfrac{0}{-1} \times 0 = 0$.
- En 0^+, on est face à une forme indéterminée du type "$0\times\infty$". Or, en posant $y = \dfrac{1}{x}$, on a $y \to +\infty$, et on sait que $xe^{\frac{1}{x}} = \dfrac{e^y}{y} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
  Ainsi, par quotient, on obtient : $\lim\limits_{x\to0^+} f_5(x) = -\infty$. On a donc tout de même une asymptote verticale en 0, d'équation $x = 0$.

f) f_6 est définie sur $\left[\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$, donc on doit calculer ses limites en $\sqrt{2}^{\pm}$ et en $+\infty$. En $\frac{1}{2}$, la fonction est bien définie, avec $f_6\left(\frac{1}{2}\right) = 0$!

- En $+\infty$, par opérations et composition avec l'exponentielle et la racine carrée, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_6(x) = +\infty$.
- En $\sqrt{2}$, on sait que $\sqrt{2x-1}$ tend vers une limite réelle strictement positive. En écrivant $\frac{1}{x^2-2} = \frac{1}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}$, puis par opérations et composition avec l'exponentielle, on conclut que : $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} f_6(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} f_6(x) = +\infty$.
  Ainsi, la courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = \sqrt{2}$.

IV. Fonctions puissances

7. On ne trace pas les graphes dans ce corrigé, se référer aux graphes du cours.

g_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Expression de sa dérivée : $\ln(\pi)\pi^x$.

g_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Expression de sa dérivée : $-\sqrt{7}x^{-\sqrt{7}-1}$.

g_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Expression de sa dérivée : $\frac{\sqrt{2}}{2}x^{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}$.

g_4 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Expression de sa dérivée : $-\frac{\ln(3)}{3^{x+1}}$.

g_5 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Expression de sa dérivée : $\frac{\ln(2)}{x}2^{\ln(x)}$.

g_6 est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$. Expression de sa dérivée : $2\pi e^{2x}\left(e^{2x}-1\right)^{\pi-1}$.

---

8. a, d, g sont exactes, les autres sont fausses. Justifications :

a) La preuve est dans le cours.

b) $2^1 \times 2^1 = 4$ mais $2^{1\times1} = 2$.

c) $2^{(1^2)} = 2$ mais $(2^1)^2 = 4$.

d) C'est a) avec $c = 2$.

e) $1^2 + 1^3 = 2$ mais $1^{2+3} = 1$.

f) $(1+1)^2 = 4$ mais $1^2 + 1^2 = 2$.

g) $(a^c)^d = a^{cd} = a^{dc} = (a^d)^c$

h) $(2\times2)^2 = 16$ mais $2^1 \times 2^1 = 4$.

---

9. $a^b = e^{b\ln(a)}$. Or :
$\ln(a) = \ln\left(e^{x^2}\right) = x^2$.
De plus, $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$ donc $\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{\ln(x)}{x}$. Ainsi : $b = \frac{\ln(x)}{x^2}$.
D'où $b\ln(a) = x^2\frac{\ln(x)}{x^2} = \ln(x)$, et donc $a^b = e^{b\ln(b)} = e^{\ln(x)} = x$.
En conclusion : $a^b = x$

---

10. On écrit tout de suite, pour tout $x > 0$, $x^x = e^{x\ln(x)}$.
Par produit, la fonction $x \mapsto x\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En composant avec la fonction exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = \left(1\times\ln(x) + x\times\frac{1}{x}\right)e^{x\ln(x)} = (\ln(x)+1)\,e^{x\ln(x)}$.
On en déduit que $f'(x) \geq 0 \iff \ln(x)+1 \geq 0 \iff \ln(x) \geq -1 \iff x \geq \frac{1}{e}$ par stricte croissance du logarithme népérien.

Ainsi, f est strictement décroissante sur $]0, 1/e]$, puis strictement croissante sur $[1/e, +\infty[$ (tableau de variations à tracer). De plus, $f(1/e) = e^{-\frac{1}{e}}$.
Limites :

- On sait que $x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ (croissance comparée), donc par composition avec la fonction continue exponentielle : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} e^0 = 1$.
- Par produit, $x\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par composition avec la fonction exponentielle, comme $e^y \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$: $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On a une asymptote verticale en 0^+, d'équation $x = 0$, et une tangente horizontale en $x = \dfrac{1}{e}$.
On peut finalement s'intéresser à la tangente en 1 : $f(1) = 1$ et $f'(1) = 1$, donc on a une tangente d'équation $y = x$.
Reste à tracer le graphe en faisant apparaître toutes ces informations.
NB : On peut également étudier le signe de $x^x - x$ (toujours positif) pour déterminer que la courbe est toujours au-dessus de sa tangente en 1.

V. Études de fonctions et tracé de graphes

11. Il s'agit de réaliser les bonnes translations et dilatations en partant du graphe des fonctions usuelles. On vérifiera en traçant sur la calculatrice ou un logiciel adapté.

a) Graphe du cosinus, dilaté d'un facteur 3 verticalement, puis translaté de 2 verticalement.

b) Graphe du logarithme népérien, contracté de 2 horizontalement, puis translaté de 1 verticalement.

c) Graphe de la fonction tangente, translaté de $\dfrac{\pi}{4}$ horizontalement vers la droite.

d) Graphe de la valeur absolue, translaté de 5 horizontalement vers la gauche puis "renversé" verticalement.

---

12. À chaque fois, on dresse le tableau de variations pour conclure sur les extrema et bornes.

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} < 0$. De plus, $f(0) = 1$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en conclut que f atteint son maximum en $x = 0$, qui vaut 1, et que f n'a pas de minimum, mais admet bien 0 comme borne inférieure.

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1$. On a $f'(x) \geq 0 \iff \sqrt{x} \leq \dfrac{1}{2} \iff x \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right]$.
De plus, $f(0) = 0$, $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$, et $f(x) = x\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ par opérations.
On peut donc tracer le tableau de variations et en déduire que f admet un maximum en $x = \dfrac{1}{4}$, qui vaut $\dfrac{1}{4}$, mais ni minimum ni borne inférieure.

c) $f(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$: cette fonction est bornée par $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$, et atteint ces valeurs une infinité de fois. Elle atteint 1 en tous les $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, et -1 en tous les $\dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) $f'(x) = -\dfrac{1}{x(2+\ln(x))^2} < 0$ sur $[1, +\infty[$, donc f est strictement décroissante.$f(1) = \dfrac{1}{2}$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par opérations, donc f admet un maximum, qui vaut $\dfrac{1}{2}$, en $x = 1$, pas de minimum, mais une borne inférieure qui vaut 0.

---

13. 1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par quotient. $\forall x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$. On en déduit que f est strictement croissante sur $]0, e]$, et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$.
De plus, $f(e) = \dfrac{1}{e}$; par quotient, $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$; et par croissance comparée, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, on a le tableau de variations, une asymptote horizontale ($y = 0$), une asymptote verticale ($x = 0$), et une tangente horizontale ($y = 1/x$).
Pour finir l'étude, on peut considérer la tangente en $x = 1$: $f(1) = 0$ et $f'(1) = 1$, donc elle a pour équation $y = x - 1$. Une étude de la fonction $x \mapsto x - 1 - f(x)$ permet de montrer que la courbe représentative est toujours en-dessous de cette tangente, complétant ainsi le graphe.

2. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. On a : $a^b = a^b \iff e^{b\ln(a)} = e^{a\ln(b)} \iff b\ln(a) = a\ln(b)$, par injectivité de la fonction exponentielle.
Comme $a, b \neq 0$, l'équation se réécrit donc $\dfrac{\ln(b)}{b} = \dfrac{\ln(a)}{a}$, c'est-à-dire $f(b) = f(a)$.
Si $a = b$, l'équation est vérifiée. Supposons que $a \neq b$, par exemple $a < b$ quitte à les échanger, et que l'équation est vérifiée. Alors $f(a) = f(b)$ admet deux antécédents distincts, donc d'après le tableau de variations, on a $f(a) = f(b) \in]0, 1/e[$, et donc $a \in]1, e[$ et $b > e$.
Comme $a \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que $a = 2$, et donc $b^2 = 2^b$. $b = 4$ convient, donc c'est la seule possibilité avec $a < b$.
Finalement, les couples convenables sont $\boxed{(2,4),\ (4,2), \text{ et tous les } (a,a), \text{ avec } a \in \mathbb{N}^*}$.

3. On a $\pi^e < e^\pi \iff e^{e\ln(\pi)} < e^{\pi\ln(e)} \iff e\ln(\pi) < \pi\ln(e)$, par stricte croissance de la fonction exponentielle.
Comme $e, \pi > 0$, cette inégalité est équivalente à $f(\pi) < f(e)$, ce qui est vrai car $1 < e < \pi$ et f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.
Ainsi, on a : $\boxed{\pi^e < e^\pi}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, avec le même raisonnement qu'aux questions précédentes, on a $e^x = x^n \iff f(x) = \dfrac{1}{n}$.
Le nombre de solutions est donc le nombre d'antécédents de $\dfrac{1}{n}$ par la fonction f.
Ainsi, d'après le tableau de variations, comme $0 < 1/e < 1$: Il n'y a aucune solution si $n \geq 1$, et une unique solution sinon.

5. L'ensemble considéré est l'image directe $e(f(\mathbb{N}^*))$. On a $2 < e < 3 < 4$, et $f(2) = f(4)$, donc d'après l'étude de f, $f(\mathbb{N}^*)$ admet un maximum en $n = 3$, qui vaut $\dfrac{\ln(3)}{3}$.
Ainsi, par stricte croissance de l'exponentielle, l'ensemble admet un $\boxed{\text{maximum en } n = 3, \text{ qui vaut } \sqrt[3]{3}}$.

---

14. Il s'agit de simplifier les expressions selon les valeurs de x.

a) Remarquons déjà que f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et paire. On l'étudie donc sur $\mathbb{R}_+^*$, et sur ce domaine $f(x) = e^{|\ln(x)|}$. On distingue donc selon le signe de $\ln(x)$.
On a $\ln(x) \geq 0 \iff x \geq 1$. Ainsi, si $x \geq 1$, on a $f(x) = e\ln(x) = x$. Et si $0 < x < 1$, alors $f(x) = e^{-\ln(x)} = \dfrac{1}{x}$.
Reste à tracer le graphe en deux morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_-^*$ par parité !

b) On a $2x - 3 \geq 0 \iff x \geq \dfrac{3}{2}$, et $x - 5 \geq 0 \iff x \geq 5$. On a donc 3 cas à considérer :

- Si $x < \dfrac{3}{2}$, $f(x) = 3 - 2x + 5 - x = 8 - 3x$.
- Si $\dfrac{3}{2} \leq x < 5$, $f(x) = 2x - 3 + 5 - x = x + 2$.
- Si $5 \leq x$, $f(x) = 2x - 3 + x - 5 = 3x - 8$.

Reste à tracer le graphe, en trois morceaux affines qui se recollent en $x = \dfrac{2}{3}$ et $x = 5$!

---

15. Pas encore !

---

16. 1. f est définie dès que $\sin(x)\cos(x) \neq 0$, c'est-à-dire $\sin(x) \neq 0$ **et** $\cos(x) \neq 0$. Ainsi, l'ensemble de définition est $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}}$.

2. $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0, et pour tout $x \in \mathcal{D}_f, x + \frac{\pi}{2} \in \mathcal{D}_f$. Soit $x \in \mathcal{D}_f$.
$f(-x) = \ln(|\sin(-x)\cos(-x)|) = \ln(|-\sin(x)\cos(x)|) = \ln(|\sin(x)\cos(x)|) = f(x)$.
$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|\right) = \ln(|\cos(x) \times (-\sin(x))|) = \ln(|-\sin(x)\cos(x)|) = \ln(|\sin(x)\cos(x)|) = f(x)$.
C'est vrai pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, donc f est bien $\boxed{\text{paire et } \frac{\pi}{2}\text{-périodique}}$.
Par périodicité, on peut restreindre l'étude à $\left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$, mais pas parité, il suffit alors d'étudier f sur le domaine $\boxed{\mathcal{D}_{et} = \left]0, \frac{\pi}{4}\right]}$.

3. Sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$, sin et cos sont dérivables, et $sin(x)\cos(x) \neq 0$, donc $x \mapsto |\sin(x)\cos(x)|$ est encore dérivable puisque la valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Enfin, comme ln est dérivable sur son domaine de définition, on obtient que f est bien dérivable sur le domaine $\mathcal{D}_{et}$.
Pour tout $x \in \mathcal{D}_{et}$, $\sin(x)\cos(x) > 0$, donc $f(x) = \ln(\sin(x)\cos(x)) = \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) = \ln(\sin(2x)) - \ln(2)$.
On en déduit que $f'(x) = \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)} \geq 0$ (et valant 0 seulement pour $x = \frac{\pi}{4}$).
Ainsi, f est strictement croissante sur ce domaine. Comme $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\ln(2)$, il reste seulement à obtenir la limite en 0^+.
On sait que $\frac{\sin(2x)}{2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0^+$, donc en composant avec le logarithme népérien, qui vérifie $\ln(y) \underset{y\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$, on obvient $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$.
On a donc le tableau de variations complet de f sur $\mathcal{D}_{et}$.

4. Reste à tracer le graphe de f sur $\mathcal{D}_{et}$, et à compléter à $\mathcal{D}$ tout entier par parité et périodicité !

---

17. 1. On écrit tout de suite, pour tout $x > 0$, $x^x = e^{x\ln(x)}$.
Par produit, la fonction $x \mapsto x\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En composant avec la fonction exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) e^{x\ln(x)} = (\ln(x) + 1)\, e^{x\ln(x)}$.
On en déduit que $f'(x) \geq 0 \iff \ln(x) + 1 \geq 0 \iff \ln(x) \geq -1 \iff x \geq \frac{1}{e}$ par stricte croissance du logarithme népérien.
Ainsi, f est strictement décroissante sur $]0, 1/e]$, puis strictement croissante sur $[1/e, +\infty[$ (tableau de variations à tracer). De plus, $f(1/e) = e^{-\frac{1}{e}}$.
Limites :

- On sait que $x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ (croissance comparée), donc par composition avec la fonction continue exponentielle : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} e^0 = 1$.
- Par produit, $x\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par composition avec la fonction exponentielle, comme $e^y \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$: $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On a une asymptote verticale en 0^+, d'équation $x = 0$, et une tangente horizontale en $x = \frac{1}{e}$.
On peut finalement s'intéresser à la tangente en 1 : $f(1) = 1$ et $f'(1) = 1$, donc on a une tangente

d'équation $y = x$.
Reste à tracer le graphe en faisant apparaître toutes ces informations.
NB : On peut également étudier le signe de $x^x - x$ (toujours positif) pour déterminer que la courbe est toujours au-dessus de sa tangente en 1.

2. On écrit $f_a(x) = e^{x\ln(x-a)}$. On doit donc avoir $x - a > 0$, et donc f_a est définie sur $\boxed{\mathcal{D}_a =]a, +\infty[}$.

3. En $+\infty$, par composition, on a toujours $\ln(x-a) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc par produit, $x\ln(x-a) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Ainsi, en composant avec la fonction exponentielle : $\boxed{f_a(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.
En a^+ : En posant $y = x - a \underset{0^+}{\longrightarrow}$, par croissance comparée, on sait que $(x-a)\ln(x-a) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} 0$.
Comme $a\ln(x-a) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} -\infty$, on obtient par somme : $x\ln(x-a) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} -\infty$. En composant par la fonction exponentielle, qui vérifie $e^y \underset{y\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, on trouve que $\boxed{f_a(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} 0.}$

4. Par opérations et compositions, f_a est dérivable sur son domaine de définition, et donc sur $]a, +\infty[$.
Pour tout $x \in]a, +\infty[$, on a :
$\boxed{f_a'(x) = \left(\ln(x-a) + \dfrac{x}{x-a}\right) e^{x\ln(x-a)}}$.
Notons qu'avec les notations de la question suivante, f_a' a le même signe que g_a, puisqu'une exponentielle est strictement positive.

5. (a) g_a est bien définie et dérivable sur $\mathcal{D}_a$ par opérations à partir de fonctions qui sont toutes dérivables sur leur domaine de définition.
$\forall x \in \mathcal{D}_a$, on a : $g_a'(x) = \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{x-a-x}{(x-a)^2} = \dfrac{x-a}{(x-a)^2} + \dfrac{-a}{(x-a)^2} \boxed{= \dfrac{x-2a}{(x-a)^2}}$.
Ainsi, $g_a'(x) \geq 0 \iff x \geq 2a$. On en déduit que g_a est strictement décroissante sur $]a, 2a]$, et strictement croissante sur $[2a, +\infty[$.
Elle admet donc bien un $\boxed{\text{minimum en } x = 2a}$, qui vaut $g_a(2a) = \ln(a) + \dfrac{2a}{a} = 2 + \ln(a)$. Ainsi : $\boxed{m = 2 + \ln(a)}$.
(b) On a $m = 0 \iff \ln(a) = -2 \iff a = e^{-2}$.
Ainsi, ce minimum est nul pour $\boxed{a = e^{-2} = \alpha}$.
(c) Soit $a > e^{-2}$. Alors le minimum de g_a est $m = 2+\ln(a) > 2-2 = 0$. Ainsi, g_a est à valeurs strictement positi
Comme f_a' a le même signe que g_a, on en déduit que $\boxed{f_a \text{ est alors strictement croissante}}$.
De même, pour $a = e^{-2}$, f_a' s'annule en un unique point, donc f_a est encore strictement croissante.
(d) Soit $a \in]0, e^{-2}[$. D'après le tableau de variations de g_a, g_a s'annule en exactement deux points, l'un sur $]a, 2a[$ et l'autre sur $]2a, +\infty[$. Elle est négative entre les deux points d'annulation, et positive à l'extérieur.
On en déduit qu'il en va de même pour f_a', et donc qu'il existe x_1, x_2 vérifiant $a < x_1 < 2a < x_2$ tels que f_a' s'annule en x_1 et x_2, et f_a est alors strictement croissante sur $]a, x_1]$, strictement décroissante sur $[x_1, x_2]$ et à nouveau strictement croissante sur $[x_2, +\infty[$.
Reste à dresser le tableau de variations, avec les limites mais sans calculer $f_a(x_1)$ et $f_a(x_2)$ (c'est impossible).

6. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$, avec $a < b$. Alors pour tout $x \in]b, +\infty[$, on a $x - b < x - a$, et donc par stricte croissance de ln, $x\ln(x-b) < x\ln(x-a)$. Ainsi, par stricte croissance de l'exponentielle, on obtient : $\boxed{f_b(x) < f_a(x)}$.
Ainsi, $\boxed{\text{si } a < b, \text{ alors la courbe de } f_a \text{ est au-dessus de celle de } f_b}$.

7. À faire !