

TD Ch 4 – Études de fonctions et fonctions usuelles

I. Domaine de définition

1. Pour chaque fonction : déterminer son domaine de définition et préciser, à l'aide des symétries et périodicités, le domaine sur lequel il suffit de l'étudier.

$$f_1 : x \mapsto e^x \ln(x + 5)$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{1}{x - \frac{1}{x}}$$

$$f_3 : x \mapsto \sqrt{2x^4 - 3x^2 - 2}$$

$$f_4 : x \mapsto \ln(|x|)$$

$$f_5 : x \mapsto \sin^2(x) \cos(x)$$

$$f_6 : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$f_7 : x \mapsto \ln\left(\sqrt{3}\sin(x) - \cos(x)\right)$$

$$f_8 : x \mapsto \frac{\sqrt{x(x-1)}}{x^2 - 4}$$

$$f_9 : x \mapsto \frac{1}{(x^3 - 2x)^2} \times \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

$$f_{10} : x \mapsto \ln(x^9 + 1)$$

$$f_{11} : x \mapsto \sin(\omega x) \text{ où } \omega \in \mathbb{R}$$

2. Pour chaque expression, donner son domaine de définition et la simplifier au maximum :

a) $f(x) = x \ln\left(\sqrt{e^{\frac{x}{2}}}\right) + \left(\sqrt{e^{2\ln(2x-1)}}\right)^3$

b) $g(x) = e^{\sqrt{\ln(x)}} + e^{\ln(x)^2}$

II. Dérivée

3. Étudier le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$g_1 : x \mapsto 1 + \ln(x)$$

$$g_2 : x \mapsto e^x \ln(x + 5)$$

$$g_3 : x \mapsto x^2 e^{-\frac{1}{x}}$$

$$g_4 : x \mapsto \sqrt{e^x}$$

$$g_5 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$g_6 : x \mapsto \frac{1+x}{1+e^x} - x$$

$$g_7 : x \mapsto \ln\left(2x - \frac{3}{x}\right)$$

$$g_8 : x \mapsto e^{x \cos(x)}$$

$$g_9 : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$$

$$g_{10} : x \mapsto \cos(e^{2x})$$

$$g_{11} : x \mapsto \ln(e^x + x^2)$$

$$g_{12} : x \mapsto \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x^2 - 1}$$

$$g_{13} : x \mapsto \ln(\ln(x))$$

$$g_{14} : x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}}{(x^2 + x + 1)^3}$$

$$g_{15} : x \mapsto \sin(\ln(2x + 7))$$

$$g_{16} : x \mapsto \frac{1}{(\cos(x))^4}$$

$$g_{17} : x \mapsto \frac{\tan(x)}{(3 + \cos^2(x))^3}$$

$$g_{18} : x \mapsto \ln\left(\frac{x+2}{\sqrt{9x^2 - 4}}\right)$$

$$g_{19} : x \mapsto 2^{\ln(x)}$$

$$g_{20} : x \mapsto \frac{1}{3^{x+1}}$$

$$g_{21} : x \mapsto (e^{2x} - 1)^\pi$$

4. Déterminer le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$h_1 : x \mapsto \frac{\ln(|x^2 - 1|)}{x}$$

$$h_2 : x \mapsto \lfloor \cos(x) \rfloor$$

$$h_3 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{|e^x - 1|} + 1}$$

III. Limites

5. Calculer les limites suivantes. :

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x-2}}$	b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{1}{x-2}}$	c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 10x\sqrt{x}$
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 + 4x^2 - 1}{x^9 + 1}$	e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7 - 3x^3 + 2x}{2x^6 - 3}$	f) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^6 + 4x^2}$
g) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 4x - 5}$	h) $\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 4x - 5}$	i) $\lim_s x \rightarrow 0 \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

6. Calculer les limites des fonctions suivantes aux bornes de leur domaine de définition. On donnera les asymptotes obtenues le cas échéant.

$f_1 : x \mapsto \frac{1 - x^2}{x^2 + x - 2}$	$f_2 : x \mapsto \frac{2x - 1}{4 - 9x^2}$	$f_3 : x \mapsto e^{x^2} - e^{x+1}$
$f_4 : x \mapsto x^2 - 3x + 1 - x x - 3 $	$f_5 : x \mapsto \frac{x}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$	$f_6 : x \mapsto (\sqrt{2x-1}) e^{\frac{1}{x^2-2}}$

IV. Fonctions puissances

7. Soient $a, d \in \mathbb{R}_+^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$.

Parmi les formules suivantes, lesquelles sont exactes ? Justifier en revenant à la définition ou en fournissant un contre-exemple, le cas échéant.

a) $(a^b)^c = a^{bc}$	b) $a^b a^c = a^{bc}$	c) $a^{d^c} = (a^d)^c$	d) $a^{2b} = (a^b)^2$
e) $a^b + a^c = a^{b+c}$	f) $(a+d)^b = a^b + d^b$	g) $(a^c)^d = (a^d)^c$	h) $(ad)^c = a^{\frac{c}{2}} d^{\frac{c}{2}}$

8. Soit $x > 0$. On pose $a = e^{x^2}$ et $b = \frac{1}{x} \ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)$.

Simplifier l'expression a^b .

9. Étudier la fonction f définie par l'expression $f(x) = x^x$.

V. Études de fonctions et tracé de graphes

10. Tracer **directement** le graphe des fonctions suivantes sur leur domaine de définition, **sans les étudier**.

a) $f(x) = 3\cos(x) + 2$	b) $f(x) = \ln(2x) + 1$	c) $f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	d) $f(x) = - x + 5 $
--------------------------	-------------------------	--	----------------------

11. Déterminer (lorsqu'ils existent) les bornes supérieures et inférieures, et les extrema (globaux) des fonctions suivantes.

a) $f : x \in [0, +\infty[\mapsto \frac{1}{x+1}$	b) $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{x} - x$
c) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x) + \sin(x)$	d) $f : x \in [1, +\infty[\mapsto \frac{1}{2 + \ln(x)}$

12. On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ par l'expression : $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

1. Étudier la fonction f et représenter son graphe.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de l'équation : $a^b = b^a$.
3. Qui est le plus grand, entre π^e et e^π ?
4. Déterminer en fonction du paramètre $n \in \mathbb{Z}$ le nombre de solutions de l'équation $e^x = x^n$
5. Que vaut $\sup \left\{ n^{\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$? Cette borne supérieure est-elle un maximum ?

13. Tracer le graphe des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

a) $f : x \mapsto e^{|\ln(|x|)|}$

b) $f : x \mapsto |2x - 3| + |x - 5|$

14. Étudier complètement chacune des fonctions suivantes, et tracer son graphe le plus précisément possible.

a) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(x)}}$

b) $f : x \mapsto \frac{x^2 - 2}{(x - 1)^2}$

c) $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$

d) $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$

e) $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$

f) $f : x \mapsto 3 \cos(x) - \cos(3x)$

g) $f : x \mapsto x^2 e^{-x^2}$

h) $f : x \mapsto \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$

i) $f : x \mapsto (2x^2 - 4x + 5)e^x - xe^{x^2}$

15. Soit f définie par l'expression : $f(x) = \ln(|\sin x \cos x|)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est paire et π -périodique, et que pour tout $x \in \mathcal{D} : f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f(x)$. À quel domaine peut-on restreindre l'étude de la fonction f ?
3. Montrer que f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$, et déterminer sa dérivée. En déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.
4. Tracer le graphe de f .

16. Dans cette exercice, on cherche à étudier les fonctions de la forme

$$f_a(x) = (x - a)^x \quad \text{où } a \in \mathbb{R}_+$$

I : Cas $a=0$

1. Étudier la fonction $f_0(x) = x^x$: domaine de définition, variations, limites, allure de la courbe.

II : Cas $a>0$

2. Déterminer le domaine D de définition de f_a
3. Calculer les limites aux bornes de ce domaine.
4. Calculer f'_a .
5. On pose sur D , $g_a(x) = \ln(x - a) + \frac{x}{x - a}$.
 - (a) Dresser le tableau de variations de g_a et montrer qu'elle admet un minimum noté m .
 - (b) Pour quelle valeur α de a ce minimum est-il nul ?
 - (c) Montrer que si $a > \alpha$ alors f_a est strictement croissante
 - (d) On suppose $a \in]0, \alpha[$, montrer que f'_a s'annule en deux points x_1, x_2 vérifiant $a < x_1 < 2a < x_2$. (on ne cherchera pas à calculer les valeurs exactes de x_1 et x_2 .) Donner alors le tableau de variations de f_a .
6. Étudier les positions relatives des différentes courbes f_a .
7. Tracer sur le même graphique qu'en partie I la courbe représentative de f_1 .