TD Ch 5 – Nombres complexes

I. Forme algébrique

1. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $(3+2i)(5i-4)$ b) $(5-2i)^2$ c) $(3-i)(3+i)-5i(i+3)$ d) i^{23}

e) $(i-\sqrt{2})^3$ f) $\dfrac{1-3i}{1+3i}$ g) $\dfrac{1+5i}{2i}$ h) $\dfrac{1+4i}{1-5i}$

i) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^9$ j) $\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$ k) $(1+i)^{2019}$ l) $\dfrac{1}{(4-i)(3+2i)}$

m) $(\sqrt{3}-2i)^4$ n) $\dfrac{(3-i)(2-3i)}{-2i+5}$

---

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z suivantes.

1. Dans cette question, il est demandé de donner les solutions sous forme algébrique.

   a) $(5-i)(z+3)=i$ b) $(2i+1)z-4i=1-i+2z$ c) $(1+2i)(z-3i)=z$

   d) $\dfrac{2+3iz}{z+i}=-2i$ e) $(2z+i)^2=4z^2-5z+3+iz$

2. Dans cette question, il est demandé de représenter les solutions dans le plan complexe.

   a) $z+\overline{z}=6$ b) $\overline{z}=i-z$ c) $\dfrac{\overline{z}}{1+i}=\dfrac{-z}{1-i}$

   d) $|z|=2$ e) $|2+z-3i|\leq 1$ f) $|z-\overline{z}|=6$

II. Module

3. Calculer de tête les modules des nombres complexes suivants :

a) -5 b) $-2i$ c) $1+i\sqrt{3}$ d) $(4+3i)(12-5i)$

e) $\dfrac{13+5i}{13-5i}$ f) $(3-\sqrt{6}i)^4$ g) $(1+i)^{10}$ h) $\dfrac{(3-5i)^2}{3+5i}$

---

4. Montrer que si $u,v\in\mathbb{C}$ sont de module 1, alors : $\dfrac{u+v}{1+uv}$ est réel, et $\dfrac{u+v}{1-uv}$ est imaginaire pur.

---

5. Soit $z\in\mathbb{C}$. Montrer qu'on a : $|z+i|=|z-i|\iff z\in\mathbb{R}$.

---

6. Montrer que pour tous $z,z'\in\mathbb{C}$, on a : $|z+z'|^2+|z-z'|^2=2\left(|z|^2+|z'|^2\right)$.
Interpréter géométriquement cette identité, qui s'appelle **identité du parallélogramme**.

---

7. Soit $t\in\mathbb{R}$. Donner l'expression du module de z_1 et z_2, où : $z_1=t^2+2it-1$ et $z_2=1-\cos(2t)+i\sin(2t)$.
Mettre z_2 sous forme exponentielle.

III. Forme exponentielle

8. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

a) -18 b) $-7i$ c) π d) $1+i$

e) $(1+i)^7$ f) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{5i-5}$ g) $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})-i}$ h) $-10e^{i\pi}\left(\dfrac{2e^{\frac{5i\pi}{8}}}{e^{\frac{7i\pi}{4}}}\right)^6$

i) $-5\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)-i\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)\right)$ j) $\sqrt{2+\sqrt{2}}-i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Pour le dernier, on calculera d'abord z^2 avant d'en déduire z.

---

9. Soit $\theta \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ et $n\in\mathbb{Z}$. Mettre sous forme trigonométrique :

a) $\dfrac{1}{1+i\tan(\theta)}$ b) $\left(\dfrac{1+i\tan(\theta)}{1-i\tan(\theta)}\right)^n$ c) $1+e^{2i\theta}$

---

10. On note $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Donner les formes exponentielles et algébriques de j et j^2.
2. En déduire que $1+j+j^2=0$ et que $\dfrac{1}{j}=j^2=\overline{j}$.
3. Calculer j^3, et en déduire la valeur de j^{853}.
4. Simplifier les expression : $(1+j)^5$, $\dfrac{1}{1+j^2}$ et $\dfrac{1-j}{1+j}$.

IV. Applications

11. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2+z+1=0$ b) $(z+1)^2+(2z+3)^2=0$ c) $z^2=4z-13$

d) $5z=4(z^2+1)$ e) $z^2-4\cos(a)z+2\left(\cos(2a)+1\right)=0$ où $a\in\mathbb{R}$

f) $z^2-2\sin(a)z+\tan^2(a)=0$, où $a\in\ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

---

12. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3-11z^2+39z-29=0$

---

13. Soit $x\in\mathbb{R}$.

1. Rappeler la formule d'Euler pour $\sin(x)$, puis développer $\sin(x)^2$.
2. En déduire une écriture de $\sin^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$.
3. Par la même méthode, exprimer $\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(3x)$ et $\sin(x)$.
4. De même, obtenir une formule pour $\cos^4(x)$.

---

14. Soit $x\in\mathbb{R}$.

1. Rappeler la forme algébrique de e^{ix}, puis développer $(e^{ix})^2$ et $(e^{ix})^3$.
2. En déduire une expression de $\sin(2x)$ et $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
3. De même, exprimer $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
4. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

---

15. 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On mettra les solutions sous forme exponentielle.

a) $z^2 = i$ b) $z^3 = -1$ c) $z^4 + 4 = 0$ d) $z^4 = j$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

2. Calculer les racines carrées complexes des nombres suivants :

a) $\sqrt{2}i - \sqrt{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}}{2} - \dfrac{i\sqrt{2}}{2}$ c) $\dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$ d) $7 + 24i$

---

16. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

---

17. 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, rappeler les solutions complexes de l'équation $z^n = 1$.

2. En déduire les solutions complexes de l'équation $z^n = (z-1)^n$.
