

TD Ch 5 – Nombres complexes

I. Forme algébrique

1. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

- | | | | |
|--|--------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| a) $(3 + 2i)(5i - 4)$ | b) $(5 - 2i)^2$ | c) $(3 - i)(3 + i) - 5i(i + 3)$ | d) i^{23} |
| e) $(i - \sqrt{2})^3$ | f) $\frac{1 - 3i}{1 + 3i}$ | g) $\frac{1 + 5i}{2i}$ | h) $\frac{1 + 4i}{1 - 5i}$ |
| i) $\left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 + i\sqrt{3}}\right)^9$ | j) $\frac{(1 + i)^2}{(1 - i)^2}$ | k) $(1 + i)^{2019}$ | l) $\frac{1}{(4 - i)(3 + 2i)}$ |
| m) $(\sqrt{3} - 2i)^4$ | n) $\frac{(3 - i)(2 - 3i)}{-2i + 5}$ | | |

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z suivantes.

1. Dans cette question, il est demandé de donner les solutions sous forme algébrique.

- | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|---------------------------|
| a) $(5 - i)(z + 3) = i$ | b) $(2i + 1)z - 4i = 1 - i + 2z$ | c) $(1 + 2i)(z - 3i) = z$ |
| d) $\frac{2 + 3iz}{z + i} = -2i$ | e) $(2z + i)^2 = 4z^2 - 5z + 3 + iz$ | |

2. Dans cette question, il est demandé de représenter les solutions dans le plan complexe.

- | | | |
|----------------------|--------------------------|---|
| a) $z + \bar{z} = 6$ | b) $\bar{z} = i - z$ | c) $\frac{\bar{z}}{1 + i} = \frac{-z}{1 - i}$ |
| d) $ z = 2$ | e) $ 2 + z - 3i \leq 1$ | f) $ z - \bar{z} = 6$ |

II. Module

3. Calculer de tête les modules des nombres complexes suivants :

- | | | | |
|------------------------------|------------------------|--------------------|--------------------------------|
| a) -5 | b) $-2i$ | c) $1 + i\sqrt{3}$ | d) $(4 + 3i)(12 - 5i)$ |
| e) $\frac{13 + 5i}{13 - 5i}$ | f) $(3 - \sqrt{6}i)^4$ | g) $(1 + i)^{10}$ | h) $\frac{(3 - 5i)^2}{3 + 5i}$ |

4. Montrer que si $u, v \in \mathbb{C}$ sont de module 1, alors : $\frac{u + v}{1 + uv}$ est réel, et $\frac{u + v}{1 - uv}$ est imaginaire pur.

5. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer qu'on a : $|z + i| = |z - i| \iff z \in \mathbb{R}$.

6. Montrer que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a : $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$.
Interpréter géométriquement cette identité dans un parallélogramme quelconque.

7. Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner l'expression du module de z_1 et z_2 , où : $z_1 = t^2 + 2it - 1$ et $z_2 = 1 - \cos(2t) + i \sin(2t)$.
Mettre z_2 sous forme exponentielle.

III. Forme exponentielle

8. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

- a) -18 b) $-7i$ c) π d) $1+i$
e) $(1+i)^7$ f) $\frac{1+i\sqrt{3}}{5i-5}$ g) $\frac{1-i\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})-i}$ h) $-10e^{i\pi} \left(\frac{2e^{\frac{5i\pi}{8}}}{e^{\frac{7i\pi}{4}}} \right)^6$
i) $\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ j) $-5 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \right)$
-

9. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Mettre sous forme trigonométrique :

- a) $\frac{1}{1+i \tan(\theta)}$ b) $\left(\frac{1+i \tan(\theta)}{1-i \tan(\theta)} \right)^n$ c) $1 + e^{2i\theta}$
-

10. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

- Donner les formes exponentielles et algébriques de j et j^2 .
 - En déduire que $1+j+j^2=0$ et que $\frac{1}{j} = j^2 = \bar{j}$.
 - Calculer j^3 , et en déduire la valeur de j^{853} .
 - Simplifier les expressions : $(1+j)^5$, $\frac{1}{1-j^2}$ et $\frac{1-j}{1+j}$.
-

IV. Applications

11. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Rappeler la formule d'Euler pour $\sin(x)$, puis développer $\sin(x)^2$.
 - En déduire une écriture de $\sin^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$.
 - Par la même méthode, exprimer $\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(3x)$ et $\sin(x)$.
 - De même, obtenir une formule pour $\cos^4(x)$.
-

12. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Rappeler la forme algébrique de e^{ix} , puis développer $(e^{ix})^2$ et $(e^{ix})^3$.
 - En déduire une expression de $\sin(2x)$ et $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
 - De même, exprimer $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
 - En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.
-

13. 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On mettra les solutions sous forme exponentielle.

- a) $z^2 = i$ b) $z^3 = -1$ c) $z^4 + 4 = 0$ d) $z^4 = j$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

2. Calculer les racines complexes des nombres suivants :

- a) $\sqrt{2}i - \sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$ d) $7 + 24i$
-

14. 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, rappeler les solutions complexes de l'équation $z^n = 1$.

2. En déduire les solutions complexes de l'équation $z^n = (z-1)^n$.

15. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- a) $z^2 + z + 1 = 0$ b) $(z+1)^2 + (2z+3)^2 = 0$ c) $z^2 = 4z - 13$
d) $5z = 4(z^2 + 1)$ e) $z^2 - 4\cos(a)z + 2(\cos(2a) + 1) = 0$ où $a \in \mathbb{R}$
f) $z^2 - 2\sin(a)z + \tan^2(a) = 0$, où $a \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$
-

16. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 + z^3 + 1 = 0$.
