TD Ch 8 – Suites usuelles

1. 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\lambda < 0$. Montrer que :
   (a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante $\Leftrightarrow (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée $\Leftrightarrow (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.

2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles croissantes.
   (a) Montrer que $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) La suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle croissante ?

---

2. Calculer le terme général, étudier la convergence, et calculer la somme des termes $S = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $u_{n+1} = u_n + 3$ b) $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$ c) $u_{n+1} = u_n - 5$

d) $u_{n+1} = 3u_n$ e) $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ f) $u_{n+1} = -5u_n$

g) $u_{n+1} = 3u_n + 3$ h) $u_{n+1} = -\frac{u_n}{2} + \frac{1}{3}$ i) $u_{n+1} = -u_n - 4$

---

3. Dans chacun des cas suivant exprimer u_n en fonction de n.

a) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$ b) $u_1 = -4$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 3u_n - 2$

c) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = -\frac{3}{4}u_{n-1} + 2$ d) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + 2u_n = 1$

---

4. On définit les suites $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de la façon suivante : $u_0 = 1, v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
2. En déduire que (u_n) est arithmético-géométrique.
3. Calculer alors u_n et v_n en fonction de n.

---

5. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par son premier terme $u_1 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = a u_n^2$$

1. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.
2. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*, v_n = \ln(u_n)$. Montrer que (v_n) est une suite arithmético-géométrique.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

---

6. On définit une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par récurrence, en posant $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2 - 9}$.
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq 3$, et en déduire que la suite est bien définie.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = u_n^2$. Déterminer la nature de la suite (w_n).
3. Exprimer w_n puis u_n en fonction de n.

---

7 (*). Pour ces suites définies par récurrence, calculer le terme général en fonction de n :

a) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n^3$ b) $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_{n+1} = \frac{3(n+1)}{2n}u_n$

c) $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + 1$ d) $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 2^n$

On pourra s'inspirer des deux exercices précédents.

---

8. On considère la suite (u_n) définie par : $\quad u_0 = 0 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{5u_n - 2}{u_n + 2}$

1. Montrer que $u_n > 1$ pour tout $n \geq 3$.
2. On note alors pour tout entier n, $w_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$.

   a) Justifier que le terme w_n est bien défini, pour tout entier n.

   b) Montrer que (w_n) est une suite géométrique.

3. Exprimer w_n puis u_n en fonction de n.

---

9. Dans chacun des cas suivant exprimer u_n en fonction de n :

a) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \end{cases}$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$

b) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = 2 \end{cases}$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 4u_n - 4u_{n-1}$

c) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = \sqrt{3} \end{cases}$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$

d) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = -3 \end{cases}$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -8u_{n+1} - 16u_n$

e) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \end{cases}$ et $\quad \forall n \geq 3, u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$

f) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \end{cases}$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -4u_n$

g) $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{u_{n+2}} = \dfrac{3}{u_{n+1}} - \dfrac{2}{u_n}$

h) $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_1 > 0 \end{cases}$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^5}{u_n^6}$

---

10. On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 4v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}$$

1. Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et qui renvoie les valeurs de u_n et v_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 12u_n$.
3. Déterminer les solutions de $x^2 - 6x + 12 = 0$ et les mettre sous forme exponentielle.
4. En déduire la valeur de u_n en fonction de n.

---

11. On considère les suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_0 = 3, \quad v_0 = \frac{11}{4}, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \ : \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 4v_n \\ v_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + v_n \end{cases}$$

1. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_{n+1}, u_n et v_n.
2. Déterminer les valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$.
3. Exprimer u_n en fonction de n, puis en déduire v_n en fonction de n.

---

12. : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 2, u_1 = 6, \text{ et } \quad \forall n \in \mathbb{N} \ : \quad u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 2n - 1$$

1. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ pour que la suite définie par $w_n = an + b$ vérifie la même relation de récurrence que la suite u.
2. Notons pour tout entier n : $d_n = u_n - w_n$. Montrer que (d_n) est récurrente linéaire d'ordre 2 .
3. En déduire l'expression de d_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Suites et Python

13. Pour chacune des suites définies ci-dessous, écrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et qui renvoie le terme de rang n de la suite.

a) $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = \cos(u_n)$

b) $u_2 = 3$ et pour tout $n \geq 3$: $\quad u_n = 3u_{n-1} - 5$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\quad u_n = 3 \times 2^n - \dfrac{1}{n^2}$

d) $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = n^2 u_n + 1$

14.

1. Écrire une fonction `liste_Fibo` qui prend en entrée un entier $n \geq 1$ et qui renvoie une **liste** contenant les premiers termes de la suite de Fibonacci, de F_0 à F_n.
   On rappelle qu'on a $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$
2. En déduire une fonction `Fibonacci`, qui prend en entrée un entrée un entier $n \in \mathbb{N}$ et qui renvoie le terme de rang n de la suite de Fibonacci.
3. Sur le même modèle, écrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et qui renvoie le terme de rang n de la suite définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = -1, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \ : \quad u_{n+2} = (n^2+1)u_{n+1} + u_n$$

---

15. Écrire une fonction Python qui prend en argument une fonction f, un réel a et un entier n, et qui renvoie le terme de rang n de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

---

16. On définit deux suites u et v par :

$$u_0 = a \in \mathbb{R}, \quad v_0 = b \in \mathbb{R}, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \ : \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} u_{n+1} & = & 3u_n & + & 2v_n \\ v_{n+1} & = & u_n & - & 4v_n \end{array} \right.$$

Écrire une fonction Pyton qui prend en argument deux réels a, b et un entier n, et qui renvoie les valeurs (u_n, v_n).

---

17 $(*)$**.** On considère les suites arithmético-géométriques, définies par un premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Écrire une fonction Python qui prend en argument trois réels u_0, a, b et un entier n, et qui renvoie le terme de rang n de la suite définie ci-dessus, **sans utiliser de boucle** ! On pourra s'efforcer de faire une fonction de seulement 2 lignes.
